

DETERMINAZIONE DELLA VITA MEDIA DEL MUONE

a cura del Consiglio di Corso di Studi in Fisica

Maggio 2007

Sommario

Dopo una breve introduzione storica, viene descritto un apparato sperimentale realizzato con finalità didattiche. Esso registra, nell'intervallo di alcuni giorni, un numero di decadimenti dei muoni da raggi cosmici sufficientemente grande da produrre una misura della vita media del muone con un errore relativo di circa 4%. Vengono introdotti e in buona parte giustificati i metodi impiegati per analizzare i dati e per valutare gli errori; ci si avvale di conoscenze di base su logaritmi, esponenziali, ma non si fa uso diretto di derivate o integrali.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Cenni storici	3
1.2	La legge empirica del decadimento	4
1.3	L'equazione del decadimento	6
1.4	Soluzione dell'equazione del decadimento	7
2	La strumentazione usata per l'esperienza	8
3	I dati sperimentali	9
3.1	Descrizione dei dati sperimentali	9
3.2	Interpretazione dei dati sperimentali	14
3.3	Selezione dei dati sperimentali	16
3.4	Il significato della vita media	17
4	Determinazione della vita media del μ	21
4.1	Interpolazione lineare dei dati	21
4.2	Il metodo dei minimi quadrati	22
4.3	La retta interpolatrice	24
5	Valutazione delle incertezze	26
5.1	Il minimo tra gli scarti quadratici	26
5.2	Distribuzione di probabilità gaussiana	27
5.3	Il principio di massima verosimiglianza	29
5.4	Valore medio e deviazione standard	30
5.5	L'incertezza nelle misure fatte	32
5.6	L'incertezza nella vita media del muone	35
6	Conclusioni	37

Elenco delle figure

1	Tasso di decadimento del mesone μ	4
2	Istogramma degli eventi registrati.	12
3	Istogramma semilogaritmico degli eventi registrati.	13
4	Tempi di decadimento del mesone μ	14
5	Sommatoria di tempi di decadimento.	19
6	Somma parziale dei tempi di decadimento.	20
7	Tempi di decadimento del mesone μ : retta di interpolazione.	25
8	Esempio di distribuzione normale di probabilità	28

Elenco delle tabelle

1	Il numero $\frac{1}{e}$ come limite.	9
2	Dati registrati durante una sessione di circa 100 ore.	11
3	Area sottesa da $x e^{-x}$ tra 0 e $X > 0$	18

1 Introduzione

Il muone è una particella elementare appartenente alla classe dei *leptoni*, la stessa alla quale appartiene il ben più noto elettrone [5]; come ogni particella ha proprietà definite e misurabili, quali la massa, la carica elettrica, ... A differenza dell'elettrone, però, il muone è una particella instabile, poichè dopo un certo tempo dall'istante in cui viene osservato, esso si trasforma, ovvero *decade* in altre particelle. Anche strutture più complesse come i nuclei atomici manifestano caratteristiche analoghe. L'istante nel quale una singola particella instabile decade, non può essere previsto, in quanto il decadimento è un processo casuale; ma è possibile definire in modo preciso la *probabilità* che essa ha di decadere, ovvero il parametro caratteristico della particella, chiamato *tempo di vita medio* o più brevemente: *vita media*.

In base alle osservazioni sperimentali, sappiamo che il numero di muoni, rispetto al numero osservato inizialmente, decresce in modo *esponenziale* al passare del tempo; precisamente, il loro numero continua a ridursi del fattore $2,71828182\dots$, che è la base dei *logaritmi naturali*, ogni qual volta trascorre un tempo di circa 2,20 microsecondi. Come vedremo nei prossimi paragrafi, questo risultato sperimentale esprime il fatto che il parametro chiamato vita media dei muoni vale [1]:

$$\tau_\mu = (2,19703 \pm 0,00004) \mu s. \quad (1.1)$$

Metteremo anche in evidenza il significato statistico della *vita media*, il cui reciproco: $\frac{1}{\tau_\mu}$ si identifica con la probabilità che un muone ha di decadere nell'unità di tempo.

Esistono muoni con carica elettrica identica a quella degli elettroni, che vengono chiamati *muoni negativi*, e denotati μ^- . Tra i loro diversi modi di decadere predomina il seguente:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$

cioè il μ^- si trasforma in un elettrone e^- , in un *antineutrino* $\bar{\nu}_e$, e in un *neutrino* ν_μ ; queste ultime sono particelle probabilmente prive di massa, o di massa comunque molto piccola [2]. I muoni che hanno carica elettrica uguale e opposta a quella degli elettroni, si chiamano *muoni positivi*, e vengono denotati con μ^+ ; essi costituiscono le *antiparticelle* dei μ^- . Come tali, decadono, con uguale probabilità dei μ^- , in un *positrone* e^+ , che è l'antiparticella dell'elettrone, nel neutrino ν_e , e nell'antineutrino $\bar{\nu}_\mu$. Lo scopo dell'esperienza consiste nella determinazione della vita media comune τ_μ dei μ^- e dei μ^+ .

1.1 Cenni storici

Hess 1912, Anderson & Neddermayer 1937

Da dove arrivano i muoni? Essi vengono prodotti in diversi modi, ma la fonte più economica e ragionevolmente continua è l'atmosfera terrestre che ci circonda. Infatti il pianeta Terra è costantemente investito da un flusso di particelle, *i raggi cosmici*, dei quali una parte (protoni, e nuclei di He, C, N, O, Fe) interagisce fortemente con le molecole dell'atmosfera terrestre: queste interazioni, che avvengono negli strati superiori dell'atmosfera, producono muoni che, continuando a muoversi con velocità prossime alla velocità della luce, giungono fino al livello del mare, dove possono essere rivelati.

1.2 La legge empirica del decadimento

I muoni, come molte altre particelle, decadono spontaneamente, trasformandosi in particelle diverse. Il fenomeno del decadimento presenta caratteristiche casuali e la legge che lo descrive è di natura statistica: non siamo in grado di prevedere quando un muone decadrà, ma possiamo definire e misurare la sua probabilità di decadere [6].

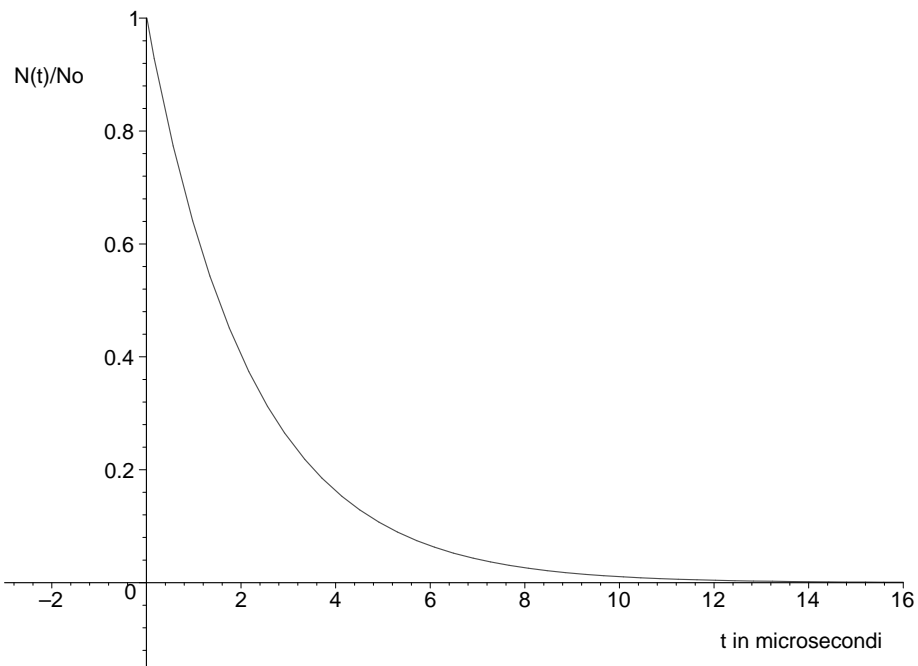


Figura 1: **Tasso di decadimento del mesone μ .** Grafico della curva esponenziale: $e^{-\lambda_\mu t}$, nel caso $\lambda_\mu = 0,455 \mu s^{-1}$. Essa esprime il rapporto $\frac{N(t)}{N_0}$ tra il numero N_0 dei muoni presi in esame all'istante iniziale $t = 0$, e il numero $N(t)$ che indica quanti degli N_0 muoni iniziali non sono ancora decaduti all'istante t ; sull'asse delle ascisse il tempo è espresso in μs , cioè in microsecondi.

Infatti, come anticipato nell'Introduzione, se un grandissimo numero N_0 di muoni viene osservato all'istante $t = 0$, quando sarà trascorso

il tempo generico $t > 0$, si trova sperimentalmente che, a causa della loro instabilità, dei muoni iniziali ne saranno sopravvissuti un numero $N(t) < N_0$ dato da:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda_\mu t}; \quad (1.2)$$

λ_μ prende il nome di *costante di decadimento del muone*, e si identifica, come vedremo, con la sua *probabilità istantanea di decadimento*. In particolare, definendo $\tau_\mu \equiv \frac{1}{\lambda_\mu}$, vediamo che, qualunque sia t , il numero di muoni $N(t + \tau_\mu)$ superstiti all'istante $t + \tau_\mu$, è dato da:

$$N(t + \tau_\mu) = N_0 e^{-\frac{t+\tau_\mu}{\tau_\mu}} = N(t) e^{-1} = \frac{N(t)}{2,71828182},$$

e quindi, come anticipato, τ_μ è la vita media del muone.

La legge 1.2 riassume i risultati delle osservazioni sperimentali e ha significato statistico: ripetendo molte volte la determinazione di quanti degli N_0 muoni iniziali non sono ancora decaduti al tempo t , si trovano risultati che fluttuano intorno al valore $N_0 e^{-\lambda_\mu t}$. Quindi, per valori molto grandi di N_0 , il rapporto $\frac{N(t)}{N_0}$ definisce la probabilità che ciascun muone iniziale ha di non decadere tra $t = 0$ e t ; pertanto essa è data da $e^{-\lambda_\mu t}$.

Inoltre, la probabilità di decadimento dei muoni non dipende dalla loro *età*, nel senso che, osservando $N(t_0)$ muoni ad un certo istante t_0 , quando sarà trascorso l'intervallo di tempo da t_0 a $t = t_0 + \Delta t > t_0$, si trova sperimentalmente che ne saranno sopravvissuti $N(t_0) e^{-\lambda_\mu \Delta t}$. La probabilità di non decadere del singolo muone è quindi caratterizzata dal parametro λ_μ e decresce *esponenzialmente* al crescere di Δt .

La 1.2 si applica sia ai decadimenti delle particelle instabili, sia ai decadimenti di strutture complesse come i nuclei atomici radioattivi; la costante di decadimento è caratteristica delle particelle alle quali essa si riferisce, e ha dimensione uguale al reciproco del tempo. Si tratta di una legge *esponenziale* in quanto espressa tramite la funzione esponenziale e^x , che è definita per qualsiasi numero reale x : e^x è il numero positivo tale che $\ln(e^x) = x$, dove \ln indica il *logaritmo naturale* in base: $e = 2,718281\dots$

Per caratterizzare il decadimento di particelle instabili, si utilizza anche il *tempo di dimezzamento*, indicato con $t_{1/2}$. Come suggerisce il nome, si tratta dell'intervallo di tempo durante il quale il numero di particelle si riduce, a causa del decadimento, fino alla metà di quello iniziale N_0 ; questa definizione, in base alla 1.2, si traduce nella condizione:

$N(t_{1/2}) = N_0 e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau_\mu}} = \frac{N_0}{2}$. Semplificando il fattore N_0 , e uguagliando il logaritmo naturale dei due membri, vediamo subito come sono legati tra loro τ_μ e $t_{1/2}$:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \ln(2) \tau = 0,69315 \tau.$$

1.3 L'equazione del decadimento

La legge 1.2 deriva dalle osservazioni sperimentali; per coglierne il significato statistico, consideriamo appunto un grande numero $N(t)$ di muoni ad un dato istante t ; negli istanti successivi, una parte di essi decade. Considerato un intervallo di tempo avente durata $\Delta t > 0$, possiamo indicare con ΔN il numero di muoni che decadono tra t e $t + \Delta t > t$; pertanto il numero $N(t + \Delta t)$ di muoni che non sono ancora decaduti all'istante $t + \Delta t$ è dato da: $N(t + \Delta t) = N(t) - \Delta N < N(t)$, e quindi $\Delta N = -[N(t + \Delta t) - N(t)]$, cioè ΔN è la variazione $N(t + \Delta t) - N(t)$, cambiata di segno, che si verifica in $N(t)$ tra t e $t + \Delta t$.

Essendo per ipotesi il numero $N(t)$ grande, la probabilità di decadimento di ogni singolo muone si ottiene rapportando il numero di muoni decaduti al numero di muoni $N(t)$ che potevano decadere:

$$\frac{\Delta N}{N(t)}.$$

Come esempio, pensiamo al modo di determinare la probabilità di ottenere **1** lanciando un dado con le sue 6 facce numerate da **1** a **6**: se, tra n lanci effettuati, n_1 lanci producono **1**, allora il rapporto $\frac{n_1}{n}$ è tanto più prossimo al valore corretto $\frac{1}{6}$ quanto più grande è n .

D'altra parte, i ΔN decadimenti considerati avvengono non in uno stesso istante, ma nell'intervallo di tempo da t a $t + \Delta t$; quindi, volendo esprimere la probabilità che ha un muone di decadere *nell'unità di tempo*, dobbiamo dividere $\frac{\Delta N}{N(t)}$ per la durata Δt . Quindi, ponendo

$$\lambda(t, \Delta t) \equiv \frac{\Delta N}{N(t) \Delta t} = -\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t) \Delta t}, \quad (1.3)$$

possiamo considerare $\lambda(t, \Delta t)$ come il *valore medio* tra t e $t + \Delta t$ della *probabilità di decadimento nell'unità di tempo*. Notiamo che, per un fissato istante t , valori differenti della durata Δt conducono in generale a valori diversi di probabilità $\lambda(t, \Delta t)$.

Per precisare meglio questa grandezza fisica, si considerano intervalli di tempo Δt sempre più corti, ai quali corrispondono numeri di decadimenti ΔN sempre più piccoli, e si definisce la *probabilità istantanea di decadimento nell'istante t* identificandola con il valore $\lambda(t)$ al quale tende la quantità $\frac{\Delta N}{N(t) \Delta t}$ quando Δt e, conseguentemente, $N(t + \Delta t) - N(t)$ tendono a zero. Con le notazioni dell'*analisi matematica*, si scrive:

$$\lambda(t) \equiv -\frac{1}{N(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \equiv -\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Nell'ultima espressione, $\frac{dN(t)}{dt}$ indica la *variazione istantanea* di $N(t)$ all'istante t , o *derivata* di $N(t)$. Il modo con cui la probabilità λ varia al passare del tempo, cioè la funzione $\lambda(t)$, dipende quindi da $N(t)$ e dalla derivata $\frac{dN(t)}{dt}$ come indicato nell'equazione 1.3.

Questa legge di natura statistica assume una forma particolare se si tiene conto dell'evidenza sperimentale: nel caso dei muoni, come anche nei decadimenti di altre particelle per le quali vale la 1.2, le osservazioni sperimentali mostrano che la probabilità istantanea di decadimento $\lambda(t)$ è indipendente dal numero di muoni presenti all'istante t , e rimane costante al passare del tempo. Quindi essa definisce un parametro caratteristico dei muoni: $\lambda_\mu \equiv \lambda(t)$, chiamato *costante di decadimento* del muone. I risultati sperimentali sul decadimento di particelle instabili vengono così riassunti nell'equazione:

$$\lambda \equiv -\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}, \quad (1.5)$$

valida nel caso di particelle con *costante di decadimento* λ .

In base a queste proprietà, la probabilità istantanea di decadere di un singolo muone è λ_μ , qualunque sia l'età del muone. Ovvero, se un muone non decade tra l'istante t e l'istante successivo $t + \Delta t > t$, la sua probabilità di decadere nell'istante $t + \Delta t$ è la stessa che aveva di decadere nell'istante t . Useremo spesso la notazione semplificata $\lambda \equiv \lambda_\mu$, dal momento che considereremo solamente il decadimento spontaneo dei muoni.

1.4 Soluzione dell'equazione del decadimento

Possiamo verificare direttamente che la funzione $N(t)$, dedotta dall'evidenza sperimentale e precisata nell'equazione 1.2, soddisfa effettivamente la condizione 1.5

$$\lambda \equiv -\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt},$$

nell'ipotesi che il numero di muoni presi in considerazione all'istante iniziale $t = 0$ s sia N_0 :

$$N_0 \equiv N(0). \quad (1.6)$$

Cioè, la soluzione dell'*equazione differenziale* 1.5, che soddisfa alla *condizione iniziale* 1.6, coincide proprio con la funzione $N(t)$ data nella 1.2. Gli strumenti forniti dall'*analisi infinitesimale* consentono di fare questa verifica in modo immediato; prescindendo da essi, il ragionamento probabilistico ci consente di raggiungere ugualmente lo scopo.

Infatti, se all'istante generico t abbiamo $N(t)$ muoni, e se tra t e $t + \Delta t$ ne decadono ΔN , allora $N(t) - \Delta N$ è il numero di particelle che non decadono in tale intervallo di tempo, e quindi, ricordando la 1.3:

$$\frac{N(t) - \Delta N}{N(t)} = 1 - \frac{\Delta N}{N(t)} = 1 - \lambda(t, \Delta t) \Delta t$$

esprime la probabilità che ha un muone di *non* decadere tra t e $t + \Delta t$. Se Δt è generico, $\lambda(t, \Delta t)$ assume valori diversi al variare di t e di

Δt , e di conseguenza non si identifica con la costante di decadimento λ . Ricordando le considerazioni fatte nel paragrafo precedente, possiamo ritenere che $\lambda(t, \Delta t)$ sia indipendente dal valore di Δt , e che si identifichi con la costante λ , solo nel caso in cui si considerano intervalli di tempo la cui durata Δt sia arbitrariamente piccola. Dunque, nel limite in cui Δt tende a 0, la quantità

$$1 - \lambda \Delta t$$

esprime la probabilità del muone di non decadere negli istanti compresi tra t e $t + \Delta t$, qualunque sia l'istante t .

Pertanto, se consideriamo gli N_0 muoni presenti all'istante $t = 0$, possiamo dire che, statisticamente, quelli che sopravvivono fino all'istante Δt sono in numero pari a: $N_0 (1 - \lambda \Delta t)$. Per ciascuno di questi, la probabilità di non decadere tra l'istante Δt e l'istante $2 \Delta t$, è ancora $1 - \lambda \Delta t$; dunque degli N_0 muoni iniziali presenti al tempo $t = 0$, ne sopravviveranno statisticamente all'istante $2 \Delta t$ una frazione pari a $N_0 (1 - \lambda \Delta t) (1 - \lambda \Delta t)$. Questo stesso ragionamento, applicato ad un terzo intervallo di tempo, di uguale durata tra $2 \Delta t$ e $3 \Delta t$, porta a concludere che il numero di muoni rimanenti all'istante $3 \Delta t$ è dato da $N_0 (1 - \lambda \Delta t)^3$.

Nel caso di un generico istante $t > 0$, possiamo pensare che esso consti di un numero L molto grande di intervalli di tempo aventi tutti la stessa durata brevissima $\Delta t = \frac{t}{L}$. Pertanto potremo asserire che il numero $N(t)$ di muoni rimanenti all'istante t , a partire dagli N_0 presenti a $t = 0$, è espresso statisticamente da:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 (1 - \lambda \Delta t)^L = N_0 (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \\ &= N_0 (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{\lambda t}{\lambda \Delta t}}. \end{aligned}$$

Ricordando le proprietà dell'elevamento a potenza, possiamo anche scrivere:

$$N(t) = N_0 \left[(1 - \lambda \Delta t)^{\frac{1}{\lambda \Delta t}} \right]^{\lambda t},$$

intendendo che la quantità contenuta fra le parentesi quadre deve essere calcolata nel limite in cui Δt , ovvero $\lambda \Delta t$, viene fatto diventare piccolo a piacere.

Nella Tabella 1 sono riportati i valori assunti dalla quantità

$$(1 - \lambda \Delta t)^{\frac{1}{\lambda \Delta t}}$$

quando si considerano valori sempre più piccoli della variabile $\lambda \Delta t$; si vede che i valori convergono progressivamente a $0,367894411714423\dots$, cioè al reciproco del numero $e = 2,718281828459045\dots$. Pertanto ricaviamo: $N(t) = \frac{N_0}{e^{\lambda t}}$, che coincide con la 1.2.

2 La strumentazione usata per l'esperienza

L'esperimento per misurare il tempo di vita medio dei muoni è realizzato in modo da poter *cronometrare* il tempo che passa tra il momento in

$\lambda \Delta t$	$(1 - \lambda \Delta t)^{\frac{1}{\lambda \Delta t}}$
10^{-1}	0,3486784401
10^{-2}	0,3660323413
10^{-3}	0,3676954248
10^{-4}	0,3678610464
10^{-5}	0,3678776018
10^{-6}	0,3678792972
10^{-7}	0,3678794228
10^{-8}	0,3678794393
10^{-9}	0,3678794410
10^{-10}	0,3678794412

Tabella 1: **Il numero $\frac{1}{e}$ come limite.** Sono riportati nella seconda colonna i valori di $(1 - x)^{\frac{1}{x}}$ corrispondenti a valori positivi sempre più piccoli di $x \equiv \lambda \Delta t$.

cui un muone giunge nell'apparato sperimentale e l'istante nel quale esso decade, istante che viene segnalato dall'apparizione di un elettrone o di un positrone in movimento.

L'apparato sperimentale, negli aspetti essenziali, è così strutturato. Un primo rivelatore, costituito da uno *scintillatore plastico*, all'arrivo di un muone mette in azione un oscillatore altamente stabile che funge da cronometro. Quindi uno strato di piombo rallenta i muoni facendo sì che una sufficiente frazione possa essere fermata in un successivo rivelatore costituito da uno *scintillatore di vetro al piombo* e, all'interno di esso, decadere. L'elettrone o il positrone prodotto dal decadimento ferma l'oscillatore, e il dispositivo consente di misurare l'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante nel quale ciascun muone viene arrestato e l'istante in cui esso decade. Una serie di *coincidenze* e di controlli logici permette di filtrare gli eventi in modo tale che quelli selezionati risultino essere ascrivibili, con un elevato grado di sicurezza, al decadimento spontaneo di muoni fermi. Nell'arco di alcuni giorni vengono registrati i tempi di decadimento di migliaia di muoni; questi mostrano l'andamento esponenziale decrescente al quale si è accennato prima, e consentono di ricavare la vita media dei muonicon precisione soddisfacente.

3 I dati sperimentali

3.1 Descrizione dei dati sperimentali

Il dispositivo sperimentale, una volta attivato, rivela, durante un intervallo di alcuni giorni, l'arrivo di muoni a migliaia. In un numero signifi-

ficativo di casi (qualche centinaio), che costituiscono altrettanti *eventi*, i muoni vengono arrestati nel dispositivo sperimentale, che misura e registra, per ciascuno di essi, l'intervallo di tempo tra l'istante di arrivo e l'istante nel quale il muone decade; questo intervallo di tempo si chiama *tempo di decadimento* di quel particolare muone. Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, il tempo di decadimento di un singolo muone può anche risultare grande, poichè la probabilità di sopravvivere per un tempo t decresce esponenzialmente al crescere di t , senza mai annullarsi esattamente.

Per ragioni sperimentali e tecniche, i valori misurati del tempo di decadimento non variano in modo *continuo*, in quanto l'intervallo di tempo minimo apprezzabile nel dispositivo sperimentale ammonta a 50 ns , dove *ns* indica *nanosecondi*, ovvero 10^{-9} s . Pertanto il dispositivo sperimentale non è in grado di distinguere tra loro decadimenti che abbiano tempi di decadimento compresi tra $50x \text{ ns}$ e $50(x+1) \text{ ns}$, dove x è un qualsiasi numero intero non negativo: questi decadimenti confluiscono in uno stesso *canale* temporale, che possiamo chiamare *canale x* .

Al termine della fase di acquisizione dati, la strumentazione indica il numero di decadimenti registrati in funzione del tempo di decadimento; più precisamente, fornisce il numero y_k di quei muoni che hanno fatto registrare un tempo di decadimento compreso tra $50x_k \text{ ns}$ e $50(x_k+1) \text{ ns}$, per ogni canale x_k nel quale siano stati registrati degli eventi. Se la fase di acquisizione dati si protrae per un tempo limitato, possono esservi canali che rimangono privi di eventi; ma già con sessioni di alcuni giorni, risultano popolati moltissimi canali fino a oltre $x = 200$, relativi a tempi di decadimento che si estendono quindi oltre 10 microsecondi.

In generale, i dati sperimentali ottenuti si presentano nella forma di un grande numero di valori interi diversi x_1, x_2, \dots, x_m , associati ad altrettanti canali, nei quali sono stati registrati rispettivamente y_1, y_2, \dots, y_m decadimenti. Gli x_k sono ordinati in modo crescente: $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m$; qui abbiamo indicato con $50x_m \text{ ns}$ il massimo tempo di decadimento osservato. Gli y_k sono ovviamente tutti maggiori di zero e la loro somma fornisce il numero totale n_0 di eventi registrati:

$$\sum_{k=1}^m y_k = n_0. \quad (3.1)$$

Come abbiamo già accennato, possono esistere uno o più valori interi $x < x_m$ tali che non risultano essere stati registrati decadimenti con tempo di decadimento compreso tra $50x \text{ ns}$ e $50(x+1) \text{ ns}$. Di conseguenza, i corrispondenti canali x non fanno parte dell'insieme $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, che presenterebbe delle lacune rispetto all'insieme $\{0, 1, 2, \dots, x_m\}$.

Nella Tabella 2 vengono riportati i risultati di una sessione durata circa 100 ore. Ogni dato incluso nella tabella è costituito dall'indice progressivo $k \geq 1$, e dai corrispondenti interi x_k, y_k . Il primo dato della

k	x_k	y_k	k	x_k	y_k	k	x_k	y_k	k	x_k	y_k	k	x_k	y_k
1	3	31	39	41	44	77	79	16	115	117	6	153	155	3
2	4	3194	40	42	45	78	80	19	116	118	6	154	156	2
3	5	943	41	43	39	79	81	12	117	119	8	155	157	5
4	6	328	42	44	34	80	82	14	118	120	7	156	158	7
5	7	279	43	45	46	81	83	19	119	121	4	157	159	3
6	8	224	44	46	37	82	84	13	120	122	9	158	160	4
7	9	182	45	47	43	83	85	16	121	123	9	159	161	2
8	10	185	46	48	26	84	86	11	122	124	7	160	162	3
9	11	199	47	49	37	85	87	13	123	125	7	161	163	1
10	12	200	48	50	33	86	88	13	124	126	4	162	164	1
11	13	178	49	51	40	87	89	17	125	127	6	163	165	2
12	14	171	50	52	40	88	90	10	126	128	4	164	167	2
13	15	148	51	53	25	89	91	10	127	129	4	165	168	5
14	16	149	52	54	33	90	92	16	128	130	4	166	169	1
15	17	144	53	55	28	91	93	17	129	131	7	167	170	2
16	18	119	54	56	30	92	94	10	130	132	6	168	172	1
17	19	105	55	57	21	93	95	13	131	133	5	169	173	1
18	20	98	56	58	29	94	96	8	132	134	9	170	174	5
19	21	91	57	59	18	95	97	9	133	135	3	171	175	1
20	22	99	58	60	30	96	98	6	134	136	4	172	176	1
21	23	101	59	61	26	97	99	10	135	137	2	173	177	4
22	24	65	60	62	24	98	100	14	136	138	5	174	181	3
23	25	67	61	63	16	99	101	10	137	139	6	175	182	2
24	26	58	62	64	22	100	102	14	138	140	5	176	183	1
25	27	72	63	65	32	101	103	6	139	141	5	177	184	1
26	28	53	64	66	15	102	104	7	140	142	2	178	185	3
27	29	79	65	67	27	103	105	7	141	143	4	179	186	4
28	30	61	66	68	25	104	106	8	142	144	4	180	187	1
29	31	65	67	69	18	105	107	6	143	145	2	181	190	1
30	32	63	68	70	17	106	108	5	144	146	4	182	191	1
31	33	48	69	71	26	107	109	5	145	147	4	183	192	4
32	34	47	70	72	24	108	110	3	146	148	5	184	193	1
33	35	51	71	73	19	109	111	12	147	149	5	185	194	2
34	36	47	72	74	21	110	112	9	148	150	10	186	195	2
35	37	51	73	75	15	111	113	10	149	151	6	187	196	2
36	38	25	74	76	22	112	114	13	150	152	5	188	197	3
37	39	37	75	77	21	113	115	13	151	153	2	189	198	4
38	40	37	76	78	19	114	116	3	152	154	2	190	199	3

Tabella 2: **Dati registrati durante una sessione di circa 100 ore.** E' evidente che gli eventi y_k in generale decrescono al crescere del tempo di decadimento x_k 50 ns. Si noti che esistono *canali* privi di eventi, precisamente quelli con $x = 0, 1, 2, 166, 171, 178 \div 180, 188, 189$.

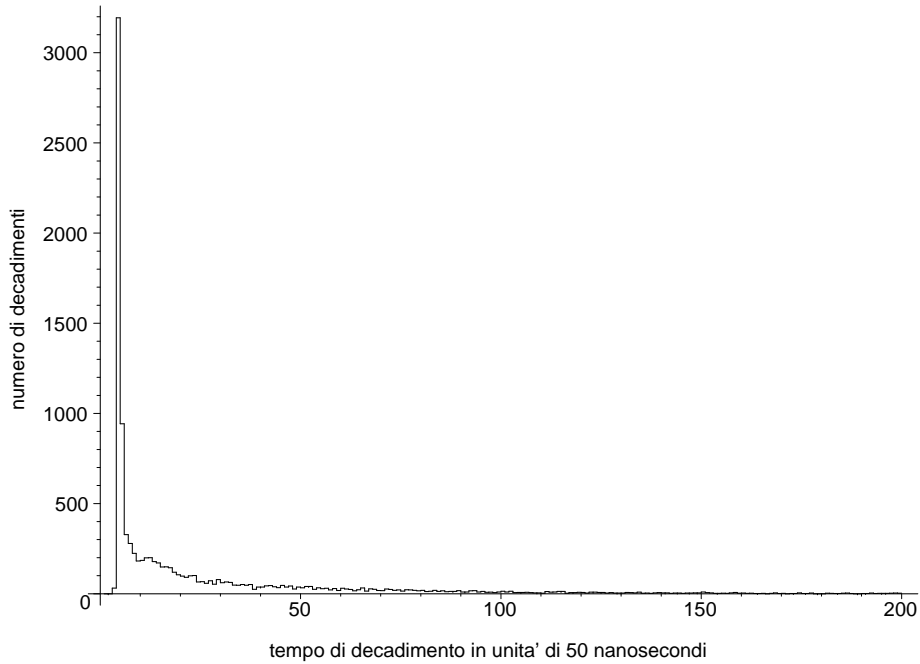


Figura 2: **Istogramma degli eventi registrati.** Sono rappresentati in ascissa x i tempi di decadimento registrati durante alcuni giorni, espressi in unità di 50 nanosecondi; l'ascissa $x = 100$, ad esempio, corrisponde al tempo di 5000 nanosecondi, ovvero di 5 microsecondi. L'istogramma mostra in ordinata il valore costante y_k per ogni x compreso nell'intervallo $x_k < x < x_k + 1$, e per ogni canale x_k .

tabella, ad esempio, corrispondente a $k = 1$, indica che sono stati registrati in tutto 31 decadimenti avvenuti con tempi di decadimento compresi fra $3 \cdot 50 \text{ ns} = 150 \text{ ns} = 0,15 \mu\text{s}$ e $4 \cdot 50 \text{ ns} = 200 \text{ ns} = 0,20 \mu\text{s}$.

Appare evidente che i decadimenti registrati diminuiscono in numero al crescere del tempo di decadimento con il quale sono avvenuti. Il massimo valore del tempo di decadimento riportato nella tabella è di $199 \cdot 50 \text{ ns} = 9,95 \mu\text{s}$, e corrisponde al canale $x_{190} = 199$, nel quale sono stati registrati $y_{190} = 3$ decadimenti. Il fatto che risulti $m = 190 < 199 = x_m$ indica l'esistenza di canali in cui non sono stati registrati decadimenti; si tratta infatti dei canali caratterizzati da $x = 0, 1, 2, 166, 171, 178 \div 180, 188, 189$.

E' utile rappresentare tutti questi dati in un diagramma cartesiano avente asse delle ascisse x , e asse delle ordinate y . Iniziando con il primo dato $i = 1$, si evidenzia il punto (x_1, y_1) , di coordinate $x = x_1, y = y_1$, e si prosegue in modo analogo con i dati relativi a $k = 2, 3, \dots$ che danno luogo ad altrettanti punti $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$, del diagramma. In realtà, per ogni dato (k, x_k, y_k) , gli y_k decadimenti si sono verificati con tempi di decadimento compresi tra $x_k \cdot 50 \text{ ns}$ e $(x_k + 1) \cdot 50 \text{ ns}$, e quindi, anzichè inserire il solo punto di coordinate x_k, y_k , è più corretto inserire

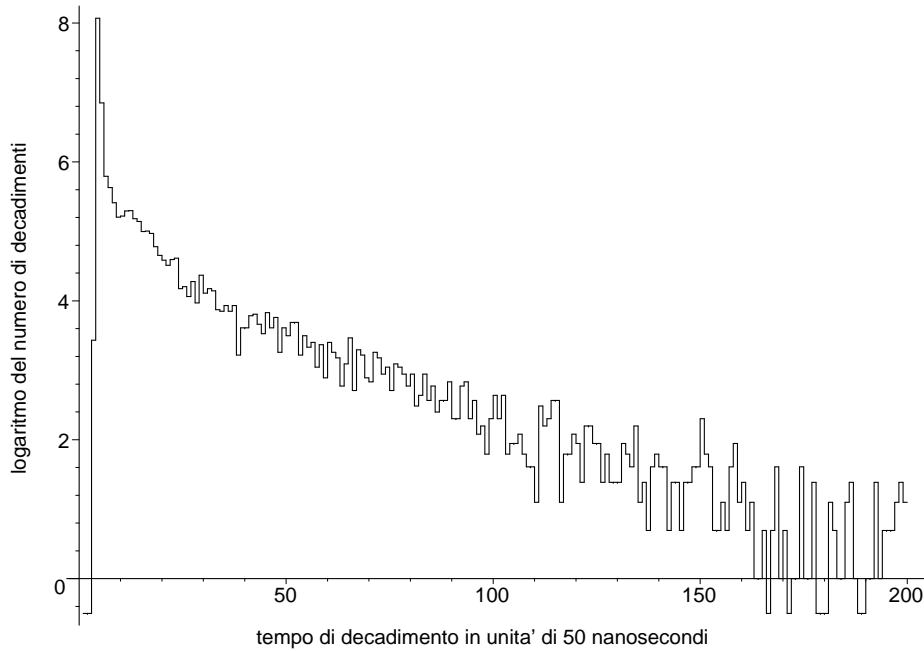


Figura 3: **Istogramma semilogaritmico degli eventi registrati.** Sono rappresentati in ascissa x i tempi di decadimento registrati durante alcuni giorni, espressi in unità di 50 nanosecondi. Le ordinate indicano, per ciascun tempo di decadimento compreso tra $x_k 50 ns$ e $(x_k + 1)50 ns$, il logaritmo naturale del numero y_k di decadimenti registrati in tale canale. Ai canali vuoti viene attribuito in ordinata il valore convenzionale $-0,5$.

un tratto rettilineo (parallelo all'asse delle ascisse) tra il punto x_k, y_k e il punto $x_k + 1, y_k$. Si ottiene in questo modo una linea spezzata, che può essere resa continua attribuendo il valore $y = 0$ ai canali eventuali in cui non sono stati registrati eventi, e inserendo un tratto rettilineo (parallelo all'asse delle ordinate) tra il punto (x_k, y_{k-1}) , e il punto (x_k, y_k) , per ogni ascissa di valore intero $x = k, 1 \leq k \leq m + 1$, come è stato fatto nell'*istogramma* rappresentato in Figura 2.

Questa rappresentazione grafica non mostra in modo chiaro come varia il numero di decadimenti in funzione del tempo di decadimento, a causa delle variazioni elevate che si verificano in tale funzione. Conviene utilizzare sull'asse delle ordinate una *scala logaritmica*, ovvero riportare in ordinata *non* i valori y_k , ma piuttosto i loro logaritmi $Y_k \equiv \ln(y_k)$, dove \ln è il simbolo del *logaritmo naturale*. Evidentemente questa rappresentazione non può valere per i canali ai quali abbiamo attribuito il valore $y = 0$, in quanto privi di eventi: infatti non esiste il logaritmo di zero. Potremo ugualmente tracciare il nuovo istogramma attribuendo, in modo convenzionale, il valore $Y = -0,5$ a tali canali, come mostrato nella Figura 3, per distinguerli comunque da tutti gli altri.

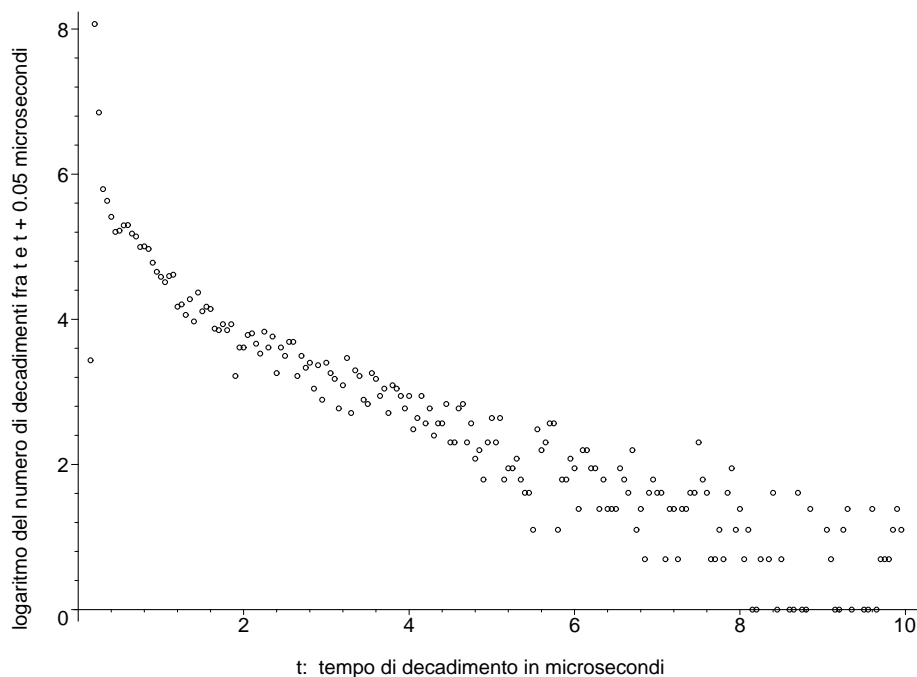


Figura 4: **Tempi di decadimento del mesone μ .** Sono rappresentati in ascissa i tempi di decadimento registrati durante alcuni giorni, espressi in microsecondi; le ordinate indicano, per ciascun canale temporale, il logaritmo del numero di decadimenti registrati in quel canale.

3.2 Interpretazione dei dati sperimentali

Se ci limitiamo a riportare i 190 punti aventi le coordinate cartesiane $(x_k \cdot 0,05 \mu s, \ln(y_k))$, per $k = 1, 2, \dots, 190$, corrispondenti ai dati forniti in Tabella 2, otteniamo il diagramma mostrato nella Figura 4, che ha sull'asse delle ascisse il tempo di decadimento t espresso in microsecondi. La figura mostra che la dispersione dei punti cresce al crescere del tempo di decadimento, ma, nonostante ciò, quando questo è maggiore di circa $1,5 \mu s$, la disposizione dei punti sembra suggerire in media un andamento rettilineo.

Questa proprietà può essere spiegata alla luce della legge sperimentale del decadimento spontaneo del muone espressa nella 1.2. Infatti supponiamo di poter individuare, tra gli n_0 decadimenti registrati, quelli causati unicamente da muoni positivi, e indichiamone il numero con $N_0 < n_0$. Il decadimento di ciascuno di questi μ^+ , essendo un fenomeno casuale, è indipendente dal decadimento di tutti gli altri μ^+ che vengono rivelati dal dispositivo sperimentale, e non dipende dall'istante in cui ciascun μ^+ viene fermato nell'apparato sperimentale. Questo fatto consente di considerare i complessivi N eventi registrati come se fossero dovuti al decadimento di altrettanti μ^+ indipendentemente dall'istante nel quale vengono arrestati nell'apparato sperimentale. In altre parole,

i dati sperimentali ottenuti e selezionati in modo da riguardare solo μ^+ , contengono la seguente informazione: ad un certo istante che possiamo far coincidere con il tempo $t = 0$, vengono esaminati N_0 muoni positivi e per ciascuno di essi viene registrato il tempo di decadimento; complessivamente $y_k > 0$ muoni, tra gli N_0 considerati al tempo $t = 0$, risultano decadere nell'intervallo compreso tra $x_k \cdot 50 \text{ ns}$ e $(x_k + 1) \cdot 50 \text{ ns}$, per un certo insieme di valori $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. Riguardando solo i μ^+ , questi dati costituiscono evidentemente un sottoinsieme di quelli riportati in Tabella 2 e poi nella Figura 4.

Nell'ipotesi che N_0 sia sufficientemente grande da giustificare considerazioni statistiche, è immediato mettere in relazione il significato dei valori registrati y_k con $N(t)$ fornito dalla 1.2 che esprime il numero di μ^+ non ancora decaduti al tempo t . Ricordando le considerazioni fatte nei paragrafi 1.3, 1.4, $\lambda\Delta t$ è la probabilità di decadere di un muone tra un qualsiasi istante t e $t + \Delta t$, purchè Δt sia molto piccolo. In questo limite, moltiplicando $\lambda\Delta t$ per il numero $N(t)$ di μ^+ sopravvissuti fino a t , otteniamo la stima di quanti μ^+ degli N_0 iniziali decadono con tempo di decadimento compreso tra t e $t + \Delta t$. E' lecito identificare Δt con 50 ns , poichè questo tempo è molto piccolo rispetto all'intervallo in cui si distribuiscono i tempi di decadimento.

Per ogni canale x_k in cui sono stati registrati decadimenti, indichiamo con

$$t_k \equiv x_k \Delta t \equiv x_k \cdot 0,05 \mu s,$$

l'istante iniziale in microsecondi. Allora il numero y_k di μ^+ che hanno fatto registrare tempi di decadimento compresi fra t_k e $t_k + 0,05 \mu s$ sarà: $y_k = \lambda\Delta t N(t_k)$, che possiamo scrivere in modo più esplicito ricordando il valore di $N(t_k)$ dato dalla 1.2:

$$y_k = \lambda\Delta t N(t_k) = \lambda\Delta t N_0 e^{-\lambda t_k}. \quad (3.2)$$

Uguagliando il logaritmo naturale di ambo i membri, ricaviamo:

$$\ln(y_k) = \ln(\lambda\Delta t N_0) - \lambda t_k. \quad (3.3)$$

Questa relazione mostra in modo evidente che i valori

$$Y_k \equiv \ln(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

dipendono *linearmente* dai tempi t_k ; la retta che rappresenta tale dipendenza può essere scritta nella forma:

$$Y \left(\frac{t}{\Delta t} \right) = a \frac{t}{\Delta t} + b, \quad (3.5)$$

dove t è limitato ai valori: $t_1 \leq t \leq t_m$. Pertanto, confrontando con la 3.3, vediamo che l'*inclinazione* della retta, ovvero il suo *coefficiente angolare*, è legato alla probabilità di decadimento dalla relazione: $a \equiv -\Delta t \lambda$, e,

ricordando la relazione tra probabilità di decadimento e vita media del muone vista nel paragrafo 1.2, si ha:

$$\tau_\mu \equiv -\frac{\Delta t}{a} = -\frac{0,05}{a} \mu s. \quad (3.6)$$

Invece b è un parametro dipendente dalle caratteristiche dell'apparato sperimentale e dalla durata dell'acquisizione dati.

Se conoscessimo il valore vero del coefficiente angolare a , la relazione 3.6 consentirebbe di ricavare il valore esatto della vita media del muone; sulla base delle misure sperimentali, ricaveremo una stima ottimale a_0 del parametro a e anche una valutazione dell'incertezza inerente tale stima. Questo risultato fornirà poi il valore della vita media del muone e della relativa incertezza.

3.3 Selezione dei dati sperimentali

Per meglio interpretare i risultati sperimentali, dobbiamo tenere conto del fatto che il dispositivo sperimentale registra gli eventi senza distinguere tra muoni positivi e muoni negativi. Quindi i dati riportati nel campione di Tabella 2 comprendono sia gli eventi causati da μ^+ , sia quelli dovuti a muoni μ^- .

Il muone negativo, che ha stessa carica elettrica dell'elettrone, oltre a decadere spontaneamente con identica probabilità del μ^+ , può anche essere catturato dai nuclei atomici che hanno carica elettrica positiva, in modo simile a quanto avviene nel caso degli elettroni. Il dispositivo sperimentale non distingue a priori se un evento fatto registrare da un μ^- è dovuto al suo decadimento, oppure alla sua cattura da parte di un nucleo. Ma la cattura si verifica in media più rapidamente del decadimento; quindi deve esservi un certo tempo t_{iniz} oltre il quale tutti i μ^- che hanno contribuito a far registrare gli n_0 eventi, sono ormai spariti, o perchè decaduti spontaneamente, o perchè catturati dai nuclei. Relativamente al campione di dati riportati in Tabella 2, tale valore t_{iniz} si colloca approssimativamente tra $t = 1,5 \mu s$ e $t = 2,0 \mu s$, ed i punti riportati in Figura 4 nella regione con $t < 2,0 \mu s$ rappresentano eventi dovuti sia a μ^- , sia a μ^+ . Invece tutti i punti con ascissa maggiore di t_{iniz} possono essere attribuiti a decadimenti soltanto di μ^+ .

Dunque l'andamento rettilineo, rilevato mediamente tra i punti della Figura 4 aventi $t > 1,5 \mu s$, è in accordo con la 3.5, e la determinazione della probabilità λ_μ , ovvero della vita media dei muoni: $\tau_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu}$, potrà essere effettuata sulla base di quei dati sperimentali che sono compresi approssimativamente tra $t = 1,5 \mu s$, e $t = 8,0 \mu s$; infatti quelli con tempi di decadimento maggiori presentano una dispersione eccessiva, e quindi devono essere trascurati.

3.4 Il significato della vita media

Prima di affrontare il problema di determinare la retta che meglio interpola i punti della Figura 4, conviene giustificare il nome di *vita media* utilizzato per il parametro $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Infatti, dalle considerazioni svolte fin'ora, non appare evidente che *la vita media è il valore medio tra i tempi di decadimento*. Per verificare questa affermazione, considerato un qualsiasi numero iniziale N_0 di muoni, dobbiamo fare la somma dei loro tempi di decadimento, che chiameremo V , e dimostrare che $\frac{V}{N_0}$ coincide con τ .

Sappiamo che $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ indica quanti, degli N_0 muoni presenti all'istante $t = 0$, esistono all'istante $t > 0$; e che $\lambda \Delta t N(t)$ è il numero che decade tra t e $t + \Delta t$, se Δt è molto piccolo. Quindi i tempi di decadimento complessivi dovuti a tale frazione di muoni sarà $\lambda \Delta t N(t) t$, dove supponiamo Δt molto piccolo. Il totale dei tempi di decadimento V si ottiene sommando tutti i contributi corrispondenti a qualunque valore del tempo.

Dovendo includere il decadimento di tutti gli N_0 muoni, si devono conteggiare anche tempi di decadimento infinitamente grandi; a tal fine, conviene fissare un valore $T > 0$ e calcolare la somma $V(T)$ dei tempi di decadimento compresi tra 0 e T ; successivamente dovremo esaminare come si comporta al crescere di T il risultato ottenuto per $V(T)$, e verificare che il limite al quale tende $V(T)$ quando T diventa infinitamente grande, che abbiamo chiamato V , uguaglia $N_0 \tau$.

Dividiamo l'intervallo da 0 a T in un numero $K + 1$ di sottointervalli di uguale ampiezza $\Delta t = \frac{T}{K+1}$, di modo che $K = \frac{T}{\Delta t} - 1$. Allora gli istanti $t_k \equiv k \Delta t$, $k = 1, 2, \dots, K$ sono gli istanti di separazione tra sottointervalli successivi; ad esempio, $t_1 = \Delta t$ separa $0 \leq t \leq \Delta t$ da $\Delta t \leq t \leq 2\Delta t$. Posto anche $t_0 \equiv 0$, e considerato un generico $k : 0 \leq k \leq K$, fra t_k e t_{k+1} decadono

$$\lambda \Delta t N(t_k) = \lambda \Delta t N_0 e^{-\lambda t_k}$$

muoni, con tempo di decadimento t_k , e quindi $\lambda \Delta t N_0 e^{-\lambda t_k} t_k$ è il contributo complessivo a $V(T)$ di questi tempi di decadimento purchè Δt sia arbitrariamente piccolo.

Per calcolare $V(T)$ dovremo considerare la somma dei contributi che derivano dai sottointervalli: $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, K = \frac{T}{\Delta t} - 1$; essendo nullo il contributo da $k = 0$, questa sommatoria assume la forma:

$$V(T, \Delta t) = \sum_{k=1}^{\frac{T}{\Delta t} - 1} \lambda \Delta t N_0 e^{-\lambda t_k} k \Delta t. \quad (3.7)$$

Successivamente dovremo calcolare il valore al quale essa tende quando Δt diventa arbitrariamente piccolo.

Conviene usare numeri privi di dimensioni fisiche: $x_k \equiv (\lambda \Delta t) k$, $k = 1, 2, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1$, e tali che $x_{k+1} - x_k = \lambda \Delta t \equiv \Delta x$; poniamo anche $X \equiv \lambda T$,

X	$\Delta x = 10^{-2}$	$\Delta x = 10^{-3}$	$\Delta x = 10^{-4}$	$\Delta x = 10^{-5}$	$1 - \frac{X+1}{e^X}$
1	.26239339	.26405709	.26405709	.26423928	.26424112
2	.59263134	.59385872	.59398062	.59399280	.59399415
3	.80009576	.80077695	.80084426	.80085098	.80085173
4	.90804670	.90838509	.90841814	.90842144	.90842181
5	.95939531	.95955539	.95957063	.95957215	.95957232
6	.98256594	.98264121	.98264799	.98264866	.98264873
7	.99266465	.99270167	.99270462	.99270491	.99270494
8	.99695906	.99697941	.99698070	.99698082	.99698084
10	.99948999	.99950029	.99950058	.99950060	.99950060
15	.99998675	.99999502	.99999510	.99999511	.99999511
20	.99999162	.99999987	.99999996	.99999996	.99999996
25	.99999167	.99999992	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Tabella 3: **Area sottesa da $x e^{-x}$ tra 0 e $X > 0$.** Le quattro colonne mostrano $S(X, \Delta x)$ calcolato per valori di Δx decrescenti da sinistra verso destra, essendo ciascuna riga associata ad un valore definito di X ; l'ultima colonna riporta il valore vero dell'area; tutti i valori sono arrotondati a 8 cifre significative. Su ciascuna riga è evidente che, spostandoci verso destra, il valore di $S(X, \Delta x)$ converge a $1 - (X + 1)e^{-X}$. Spostandoci verso il basso nell'ultima colonna, vediamo che l'area compresa tra la curva $x e^{-x}$ e l'asse delle ascisse, estesa a valori crescenti di X , sembra effettivamente convergere a 1, che è il valore esatto di tale area.

cosicchè si ha $\frac{T}{\Delta t} = \frac{X}{\Delta x}$, e

$$x_k = k \Delta x, k = 1, 2, \dots, \frac{X}{\Delta x} - 1.$$

Con queste notazioni la 3.7 diventa:

$$V(T, \Delta t) = \frac{N_0}{\lambda} \sum_{k=1}^{\frac{T}{\Delta t}-1} x_k e^{-x_k} (\lambda \Delta t) = \frac{N_0}{\lambda} \sum_{k=1}^{\frac{X}{\Delta x}-1} x_k e^{-x_k} \Delta x. \quad (3.8)$$

L'espressione

$$S(X, \Delta x) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{X}{\Delta x}-1} x_k e^{-x_k} \Delta x \quad (3.9)$$

è costituita dalla somma di $\frac{X}{\Delta x} - 1$ aree di rettangoli aventi tutti base Δx , e altezza rispettivamente $x_k e^{-x_k}$, per $k = 1, 2, \dots, \frac{X}{\Delta x} - 1$. Nella Figura 5 è rappresentato il grafico della funzione $x e^{-x}$, l'intervallo in ascissa tra 0 e un certo X , con la sua suddivisione in 6 sottointervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{X}{6}$. Sono evidenziate anche le aree dei 5 rettangoli che contribuiscono a $S(X, \frac{X}{6})$. Quando Δx diventa arbitrariamente piccolo,

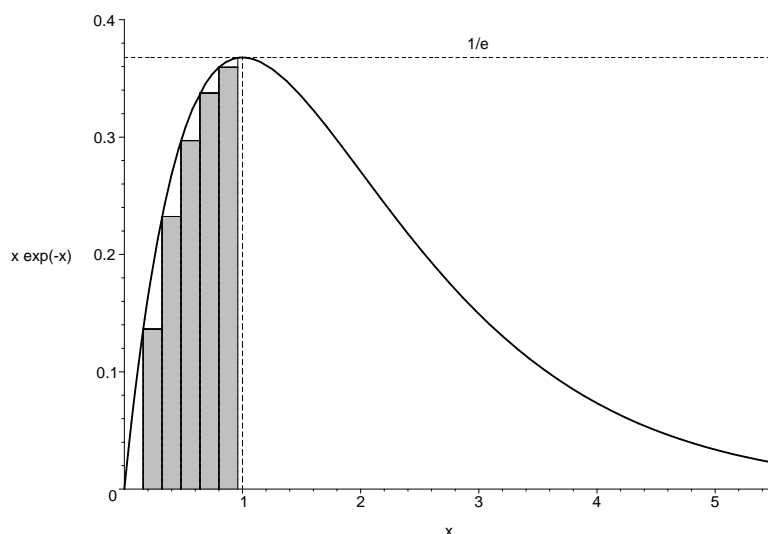


Figura 5: **Sommatoria di tempi di decadimento.** Facendo riferimento alla 3.7, si è scelto $X = 0,96$ e $\Delta x = 0,16$, di modo che $\frac{X}{\Delta x} = 6$ e $x_1 = 0,16, x_2 = 0,32, x_3 = 0,48, x_4 = 0,64, x_5 = 0,80, x_6 = X$; quindi sono rappresentati i 5 rettangoli aventi altezze $x_k e^{-x_k}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, la cui area complessiva fornisce una approssimazione all'area della regione delimitata dalla curva $x e^{-x}$, dall'asse delle x , e dalla retta $x = X$. Il grafico mostra che la funzione $x e^{-x}$ non supera il valore e^{-1} che raggiunge solo se $x = 1$.

i rettangoli sono sempre più numerosi e stretti, ed è plausibile pensare che l'area complessiva dei rettangoli si approssimi sempre più all'area della regione delimitata dalla curva $x e^{-x}$, dalla retta parallela all'asse delle ordinate $x = X$, e dall'asse delle ascisse. Infatti si può dimostrare che, effettivamente, quando Δx tende a zero, $S(X, \Delta x)$ diventa uguale a questa area, che prende il nome di *integrale definito tra 0 e X della funzione $x e^{-x}$* ; indicheremo questa area con la notazione $S(X)$. Incidentalmente notiamo dalla Figura 5 che i valori assunti dalla funzione $x e^{-x}$ sono minori di $\frac{1}{e}$ per ogni valore di x diverso da $x = 1$, mentre per $x = 1$ la funzione raggiunge appunto tale valore massimo.

Usando l'*analisi infinitesimale*, è immediato verificare che, fissato un qualsiasi $X > 0$ e facendo diminuire progressivamente Δx fino a 0, $S(X, \Delta x)$ diventa uguale a $1 - (X + 1)e^{-X}$, cioè :

$$S(X) = 1 - (X + 1)e^{-X}. \quad (3.10)$$

Possiamo verificare questo fatto, in modo approssimativo, calcolando numericamente $S(X, \Delta x)$ per valori successivi sempre più piccoli di Δx . Nella Tabella 3 le righe corrispondono a valori diversi di X e l'ultima colonna mostra nell' X -esima riga il valore di $1 - (X + 1)e^{-X}$. Le altre colonne sono associate a valori decrescenti $\Delta x = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$, e nella casella $X, \Delta x$ è riportato il valore di $S(X, \Delta x)$. Ciascuna riga mostra in modo evidente che, man mano che Δx decresce verso 0, $S(X, \Delta x)$ converge al

valore vero $1 - (X + 1)e^{-X}$. E' importante avvertire che i valori riportati nella tabella di $S(X, \Delta x)$ non possono essere ottenuti manualmente impiegando una semplice calcolatrice; ad esempio, nel caso $\Delta x = 10^{-5}$, occorre calcolare 100.000 X contributi alla sommatoria $S(X, 10^{-5})$.

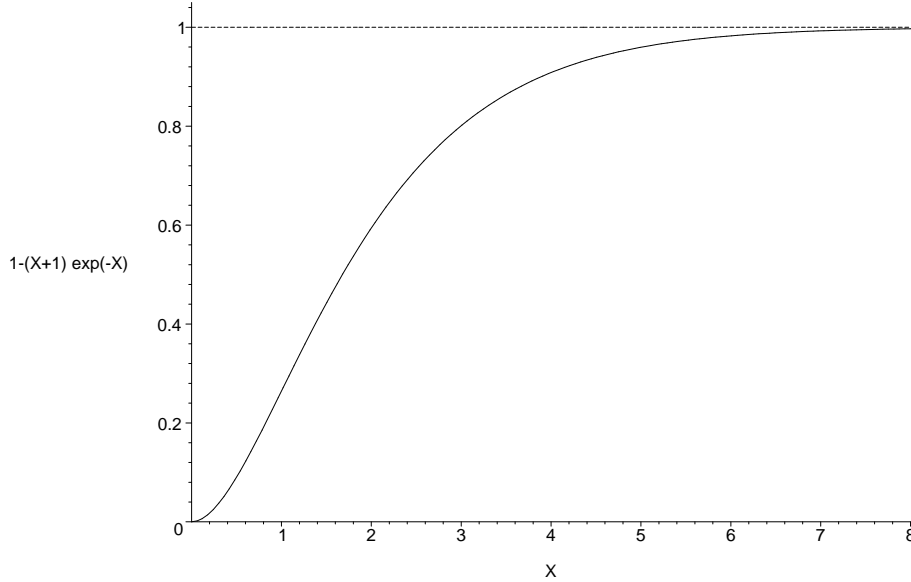


Figura 6: **Somma parziale dei tempi di decadimento.** Grafico della funzione $S(X) = 1 - (X + 1)e^{-X}$ che, in base alla 3.11, esprime la somma di tutti i tempi di decadimento minori di $T = \frac{X}{\lambda}$, moltiplicata per il fattore $\frac{\lambda}{N_0}$. Il grafico evidenzia che $S(X)$ tende a 1 quando X diventa arbitrariamente grande.

Dunque, ricordando la 3.8, vediamo che la somma di tutti i tempi di decadimento compresi fra 0 e T , fatti registrare dagli N_0 muoni iniziali, è data da:

$$V(T) = \frac{N_0}{\lambda} S(\lambda T) = \frac{N_0}{\lambda} [1 - (\lambda T + 1)e^{-\lambda T}]. \quad (3.11)$$

La Figura 6 mostra il grafico di $\frac{\lambda}{N_0} V(T)$, cioè di $S(\lambda T)$, al variare di T , ed evidenzia che $S(\lambda T)$ si approssima al valore 1, quando T diventa arbitrariamente grande; ciò è anche indicato numericamente dall'ultima colonna in Tabella 3, e significa che la regione compresa tra l'asse delle ascisse x e la curva rappresentativa della funzione $x e^{-x}$ ha area uguale a 1.

Pertanto, quando T diventa infinitamente grande, $V(T)$ tende alla somma V di tutti i tempi di decadimento, compresi quelli arbitrariamente grandi; e dunque $V = \frac{N_0}{\lambda}$, ovvero $\tau \equiv \frac{1}{\lambda} = \frac{V}{N_0}$ è la media aritmetica fra tutti i tempi di decadimento degli N_0 muoni .

4 Determinazione della vita media del μ

4.1 Interpolazione lineare dei dati

Secondo le considerazioni svolte alla fine del paragrafo 3.2, per ricavare il valore della vita media del muone dai dati sperimentali riportati nella Tabella 2, dovremo limitarci a utilizzarne soltanto una parte; più precisamente, consideriamo i dati relativi a tempi di decadimento compresi approssimativamente fra $1,5 \mu s$ e $8,0 \mu s$. Come già notato in precedenza, nei calcoli conviene impiegare grandezze prive di dimensioni fisiche, cioè gli interi x_k al posto dei tempi $t_k = \Delta t x_k$; quindi scriveremo la 3.3 nella forma:

$$Y_k = \ln(y_k) = (-\lambda_\mu \Delta t) x_k + b \equiv a x_k + b, \quad k_i \leq k \leq k_f, \quad (4.1)$$

dove abbiamo fatto l'identificazione

$$\Delta t = 0,05 \mu s, \quad a = -\lambda_\mu \Delta t, \quad (4.2)$$

e indicato l'intervallo: $k_i \leq k \leq k_f$ dei dati che intendiamo selezionare dalla Tabella 2; il numero n dei dati selezionati è quindi: $n = k_f - k_i + 1$.

Oltre a discutere il problema in generale, calcoleremo esplicitamente le grandezze che verranno via via introdotte, scegliendo come esempio: $k_i = 38$, che corrisponde nella Tabella 2 a $x = 40$, ovvero a

$$t = 40 \cdot 0,05 \mu s = 2,0 \mu s,$$

al quale si associa $y = 38$, e scegliendo $k_f = 148$, che corrisponde a $x = 150$, ovvero a

$$t = 150 \cdot 0,05 \mu s = 7,5 \mu s, \quad y = 10;$$

in questo caso utilizzeremo $n = 148 - 38 + 1 = 111$ dati sperimentali.

Vogliamo determinare l'equazione della retta $Y(x) = ax + b$ che *meglio interpola* gli n punti (x_k, Y_k) , $k_i \leq k \leq k_f$, del diagramma cartesiano rappresentativi dei dati sperimentali: $x_k, Y_k \equiv \ln(y_k)$. Se nel piano cartesiano avente ascissa x e ordinata Y gli n punti di coordinate (x_k, Y_k) appartenessero tutti alla retta di equazione $Y(x) = ax + b$, si avrebbe per ogni valore di k : $Y(x_k) = ax_k + b = Y_k$, e quindi: $[Y_k - (ax_k + b)] = [Y_k - (ax_k + b)]^2 = 0$. Poichè in generale è $n \gg 2$, ciò non si verifica qualunque sia la retta $Y(x) = ax + b$; dunque una generica retta individua per tutti, o per molti degli n punti sperimentali, uno *scarto* $Y_k - Y(x_k) \neq 0$, che può essere sia positivo, che negativo. Invece lo *scarto quadratico* $[Y_k - Y(x_k)]^2$ sarà sempre positivo, a meno che il punto sperimentale (x_k, Y_k) appartenga alla retta. Allora, relativamente alla retta di equazione $Y(x) = ax + b$, e all'insieme dei dati sperimentali $x_k, Y_k = \ln(y_k)$, $k_i \leq k \leq k_f$, si definisce *scarto quadratico*

medio la funzione $E(a, b)$ di a e di b che si ottiene calcolando la media aritmetica tra tutti gli scarti quadratici relativi agli n dati sperimentali; cioè si pone:

$$E(a, b) \equiv \frac{1}{n} \left([Y_{k_i} - Y(x_{k_i})]^2 + [Y_{k_i+1} - Y(x_{k_i+1})]^2 + [Y_{k_i+2} - Y(x_{k_i+2})]^2 + \cdots + [Y_{k_f} - Y(x_{k_f})]^2 \right),$$

ovvero

$$E(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - Y(x_k)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - (ax_k + b)]^2, \quad (4.3)$$

dove il simbolo

$$\sum_{k=k_i}^{k_f}$$

denota l'operazione di somma degli n scarti quadratici

$$[Y_k - Y(x_k)]^2, \quad k = k_i, k_i + 1, k_i + 2, \dots, k_f = k_i + n.$$

Teniamo presente che, per definizione, $E(a, b)$ risulta essere una quantità maggiore di zero, qualunque sia il valore assunto da a e da b .

4.2 Il metodo dei minimi quadrati

Il *metodo dei minimi quadrati* [6], applicato al nostro problema, consiste nell'identificare la retta che meglio interpola i dati sperimentali, con la retta di equazione $Y(x) = a_0 x + b_0$ tale che i suoi coefficienti a_0 e b_0 rendano *minimo* lo scarto quadratico medio; ovvero a_0, b_0 devono essere tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza $E(a_0, b_0) \leq E(a, b)$, comunque si scelgano a e b . Si tratta di verificare che tali valori a_0, b_0 esistono, e che sono determinabili in modo univoco.

Notiamo che ciascun contributo a $E(a, b)$ è un polinomio di secondo grado nelle variabili a, b :

$$(Y_k - ax_k - b)^2 = Y_k^2 + x_k^2 a^2 + b^2 - 2Y_k x_k a - 2Y_k b + 2x_k ab,$$

e quindi tale sarà anche $E(a, b)$. Per determinare la sua espressione esplicita, conviene definire le seguenti medie aritmetiche:

$$\bar{x} \equiv \frac{\sum_k x_k}{n}, \quad \bar{y} \equiv \frac{\sum_k Y_k}{n}, \quad (4.4)$$

$$\overline{x^2} \equiv \frac{\sum_k (x_k)^2}{n}, \quad \overline{y^2} \equiv \frac{\sum_k (Y_k)^2}{n}, \quad \overline{xy} \equiv \frac{\sum_k x_k Y_k}{n}, \quad (4.5)$$

dove abbiamo usato la notazione semplificata $\sum_k \equiv \sum_{k=k_i}^{k_f}$. Allora, la sommatoria nella 4.3 diventa:

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \frac{1}{n} \sum_k (Y_k - a x_k - b)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_k (Y_k^2 + a^2 x_k^2 + b^2 - 2a x_k Y_k - 2b Y_k + 2x_k a b). \end{aligned}$$

Notiamo che, di questi 6 diversi addendi, l'unico che non dipende dal valore di k , è b^2 ; quindi b^2 viene sommato n volte, e poi diviso per n , cosicchè contribuisce a $E(a, b)$ semplicemente con b^2 . Invece gli altri 5 addendi, assumendo valori diversi al variare di k , dovranno essere sommati ciascuno a parte. Ad esempio, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_k a^2 x_k^2 &= \frac{x_{k_i}^2 a^2 + x_{k_i+1}^2 a^2 + \cdots + x_{k_f}^2 a^2}{n} \\ &= \frac{(x_{k_i}^2 + x_{k_i+1}^2 + \cdots + x_{k_f}^2) a^2}{n} = \frac{\sum_k x_k^2}{n} a^2 = \overline{x^2} a^2. \end{aligned}$$

Operando in modo analogo negli altri 4 casi, e ricordando le definizioni 4.4, 4.5 troviamo:

$$E(a, b) = \overline{x^2} a^2 + 2\bar{x} a b + b^2 - 2\overline{xy} a - 2\bar{y} b + \overline{y^2}. \quad (4.6)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{n} &= \frac{\sum_k (x_k^2 - 2\bar{x} x_k + (\bar{x})^2)}{n} \\ &= \frac{\sum_k x_k^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_k x_k}{n} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2; \end{aligned} \quad (4.7)$$

poichè non può essere $x_k - \bar{x} = 0$ per ogni valore di k , il primo membro è una quantità positiva, e quindi risulta in particolare:

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 > 0. \quad (4.8)$$

Possiamo quindi definire i seguenti numeri:

$$a_0 \equiv \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad b_0 \equiv \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\overline{x\bar{y}}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad (4.9)$$

essendo il denominatore di queste espressioni sicuramente diverso da zero. Vogliamo verificare che i parametri a_0, b_0 così definiti rendono minimo lo scarto quadratico medio, cioè che $E(a_0, b_0) \leq E(a, b)$, qualunque siano i valori assunti da a e da b .

4.3 La retta interpolatrice

A tale scopo possiamo scrivere $E(a, b)$, che è un polinomio di secondo grado nelle variabili a, b , in una forma diversa che faccia intervenire esplicitamente le quantità a_0, b_0 appena introdotte:

$$\begin{aligned} E(a, b) = c_{aa} (a - a_0)^2 &+ 2 c_{ab} (a - a_0) (b - b_0) + c_{bb} (b - b_0)^2 \\ &+ 2 c_a (a - a_0) + 2 c_b (b - b_0) + c. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Trattandosi dello stesso polinomio di grado 2 nelle variabili a, b , scritto in modo diverso rispetto alla 4.6, i coefficienti $c_{aa}, c_{ab}, c_{bb}, c_a, c_b, c$ devono essere tali che i coefficienti moltiplicativi delle *potenze simili* nelle due espressioni 4.6 e 4.10 siano identici. Per facilitare l'identificazione conviene sviluppare l'espressione 4.10 in modo da evidenziare i coefficienti moltiplicativi delle varie potenze di a, b ; ordinando opportunamente i termini, si trova:

$$\begin{aligned} E(a, b) &= c_{aa} a^2 + 2c_{ab} ab + c_{bb} b^2 \\ &+ 2(-c_{aa} a_0 - c_{ab} b_0 + c_a) a + 2(-c_{ab} a_0 - c_{bb} b_0 + c_b) b \\ &+ c_{aa} a_0^2 + 2c_{ab} a_0 b_0 + c_{bb} b_0^2 - 2c_a a_0 - 2c_b b_0 + c. \end{aligned}$$

Confrontando con la 4.6 e identificando i coefficienti delle potenze di secondo grado a^2, ab, b^2 , si vede che deve essere rispettivamente:

$$c_{aa} = \overline{x^2}, \quad c_{ab} = \overline{xy}, \quad c_{bb} = 1.$$

Tenuto conto di questi risultati, confrontando i coefficienti delle potenze a, b , si ricava rispettivamente:

$$-\overline{xy} = -\overline{x^2} a_0 - \overline{xy} b_0 + c_a, \quad -\overline{y} = -\overline{x} a_0 - \overline{y} b_0 + c_b,$$

ovvero:

$$c_a = \overline{x^2} a_0 + \overline{xy} b_0 - \overline{xy}, \quad c_b = \overline{x} a_0 + \overline{y} b_0 - \overline{y};$$

sostituendo le definizioni 4.9 di a_0, b_0 , le semplificazioni mostrano che $c_a = c_b = 0$. Quanto alla costante c , se scriviamo la 4.10 scegliendo $a = a_0, b = b_0$, il secondo membro si riduce a c , e quindi vediamo che $c = E(a_0, b_0)$.

Dunque lo scarto quadratico medio assume la forma:

$$E(a, b) = E(a_0, b_0) + \overline{x^2} (a - a_0)^2 + 2\overline{x} (a - a_0)(b - b_0) + (b - b_0)^2,$$

che, aggiungendo e togliendo a secondo membro la quantità $(\overline{x})^2 (a - a_0)^2$, diventa:

$$E(a, b) = E(a_0, b_0) + (\overline{x^2} - (\overline{x})^2) (a - a_0)^2 + [\overline{x} (a - a_0) + (b - b_0)]^2. \quad (4.11)$$

Ricordando la 4.8, vediamo che i termini dipendenti da a e da b sono entrambi non negativi; quindi $E(a, b)$ raggiunge il suo valore minimo nel caso che si abbia congiuntamente $(a - a_0)^2 = 0$, e $[\overline{x} (a - a_0) + (b - b_0)]^2 = 0$, ovvero quando sia $a = a_0, b = b_0$.

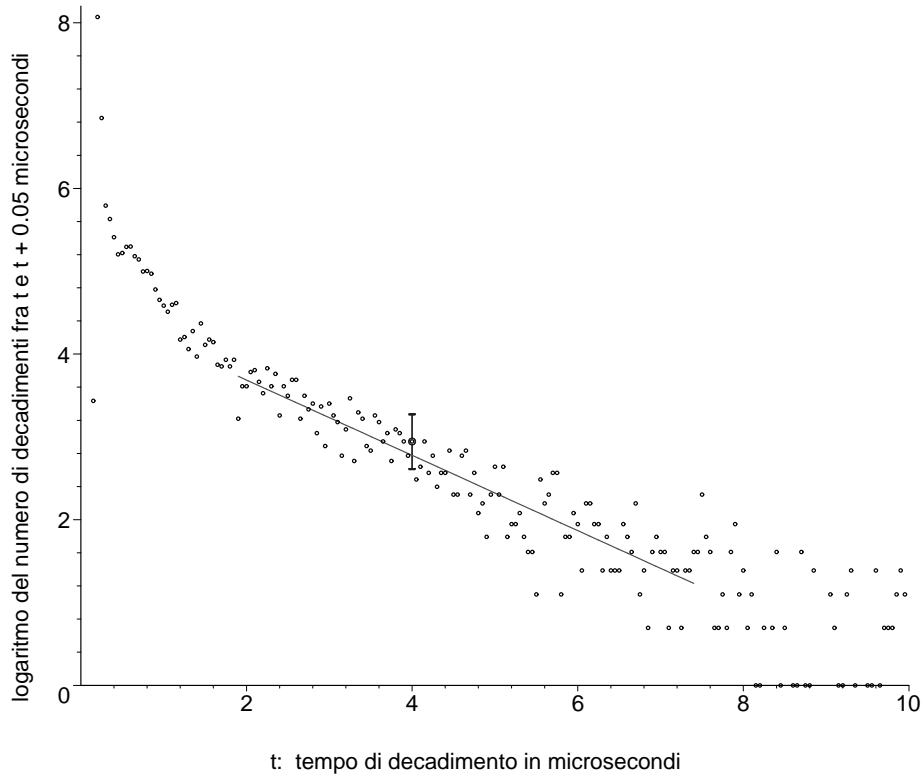


Figura 7: **Tempi di decadimento del mesone μ : retta di interpolazione.** Insieme ai dati sperimentali riportati nella Fig. 4, è indicata la retta di interpolazione ottenuta con il metodo dei minimi quadrati applicato ai dati sperimentali riportati nell'intervallo $38 \leq k \leq 148$ di Tabella 2, relativi a tempi di decadimento compresi tra $1,9 \mu s$ e $7,4 \mu s$. La sua equazione è: $Y\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \equiv \left(\frac{a_0}{\Delta t}\right) t + b_0$, dove $\frac{a_0}{\Delta t} = -0,455$, $b_0 = 4,60$. Nei paragrafi successivi, la discussione sugli errori porterà ad assegnare a ogni punto uguale incertezza; nell'esempio considerato, l'incertezza nel valore dell'ordinata risulta pari a $0,33$, come rappresentato per un punto del grafico.

Il metodo dei minimi quadrati ci porta a considerare la retta di equazione $Y(x) = a_0 x + b_0$ come quella che meglio interpola i dati sperimentali selezionati; essa viene anche chiamata *retta di regressione*. Ricordando la 4.2, la probabilità di decadimento, e quindi la vita media del muone, risultano determinate in funzione di $a_0 = -\lambda_\mu \Delta t$, cioè

$$\tau_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu} = -\frac{\Delta t}{a_0} = \frac{\Delta t (\overline{x^2} - (\overline{x})^2)}{\overline{x\bar{y}} - \overline{x}\bar{y}}. \quad (4.12)$$

Selezionando dalla Tabella 2 i dati nell'intervallo $38 \leq k \leq 148$, e inserendoli nelle 4.4, 4.5, il calcolo numerico conduce ai seguenti valori:

$$\overline{x} = 95,000, \quad \overline{y} = 2,4363, \quad \overline{x^2} = 10052, \quad \overline{x\bar{y}} = 208,11, \quad \overline{y^2} = 6,5709, \quad (4.13a)$$

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 1026,67, \quad \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 0,635509, \quad \bar{x}\bar{y} - \overline{xy} = 23,3383, \quad (4.13b)$$

e sostituendo nella 4.9 si ricava:

$$a_0 = -0,0227321, \quad b_0 = 4,59583; \quad (4.14)$$

ponendo nella 4.12 $\Delta t = 0,05 \mu s$, otteniamo come nostro valore sperimentale della vita media del muone:

$$\tau_\mu = 2,1995 \mu s. \quad (4.15)$$

Esso è in accordo con il risultato 1.1, e nei prossimi paragrafi ne valuteremo il grado di attendibilità; vedremo che sono significative solo le prime cifre decimali riportate.

5 Valutazione delle incertezze

5.1 Il minimo tra gli scarti quadratici

In primo luogo troviamo l'espressione esplicita dello scarto quadratico medio minimo, cioè di $E(a_0, b_0)$, in funzione dei dati sperimentali, determinandone il valore numerico nel caso del campione di dati selezionato.

Notiamo che l'espressione di b_0 data nella 4.9 può essere modificata coinvolgendo a_0 ; infatti si ha:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - (\bar{x})^2\bar{y} - \bar{x}\overline{xy} + (\bar{x})^2\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \\ &= \frac{\bar{y}(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) - \bar{x}(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \bar{y} - a_0\bar{x}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\bar{y} = a_0\bar{x} + b_0. \quad (5.1)$$

Ciò mostra che il punto di coordinate (\bar{x}, \bar{y}) , che può essere considerato una sorta di *baricentro* dei dati sperimentali da noi utilizzati, appartiene alla retta $Y(x) = a_0x + b_0$.

Ricordando la 4.3 scriviamo lo scarto quadratico medio calcolato per $a = a_0, b = b_0$ nella forma:

$$\begin{aligned} E(a_0, b_0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - (a_0x_k + b_0)]^2 = \frac{1}{n} \sum_k [Y_k - a_0x_k + \bar{x}a_0 - \bar{y}]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_k [(Y_k - \bar{y}) - a_0(x_k - \bar{x})]^2, \end{aligned}$$

avendo usato la 5.1 per esprimere b_0 ; se sviluppiamo ciascun addendo di questa somma, che è il quadrato di un binomio, troviamo:

$$E(a_0, b_0) = \frac{1}{n} \sum_k [(Y_k - \bar{y})^2 - 2a_0(Y_k - \bar{y})(x_k - \bar{x}) + a_0^2(x_k - \bar{x})^2]. \quad (5.2)$$

Analogamente alla 4.7: $\frac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{n} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, possiamo eseguire anche le altre due somme, ottenendo:

$$\frac{\sum_k (Y_k - \bar{y})^2}{n} = \overline{y^2} - (\bar{y})^2,$$

e anche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_k (Y_k - \bar{y})(x_k - \bar{x}) &= \frac{\sum_k Y_k x_k}{n} - \bar{x} \frac{\sum_k Y_k}{n} - \bar{y} \frac{\sum_k x_k}{n} + \bar{y} \bar{x} \\ &= \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

Allora la 5.2 diventa:

$$E(a_0, b_0) = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 - 2a_0(\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}) + a_0^2[\overline{x^2} - (\bar{x})^2];$$

sostituendo l'espressione 4.9 di a_0 e semplificando, ricaviamo finalmente:

$$E(a_0, b_0) = \frac{(\overline{y^2} - (\bar{y})^2)(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) - (\overline{xy} - \bar{x} \bar{y})^2}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \quad (5.3)$$

Usando i valori trovati nella 4.13, i dati sperimentali selezionati conducono allo scarto quadratico medio minimo:

$$E(a_0, b_0) = 0,104979. \quad (5.4)$$

5.2 Distribuzione di probabilità gaussiana

Per discutere le incertezze dei nostri risultati, conviene richiamare alcuni concetti base di analisi statistica e di teoria degli errori [6]. Consideriamo una grandezza fisica il cui valore z_v è incognito e supponiamo di eseguire m misurazioni diverse della stessa; in generale si trovano molti valori diversi, distribuiti intorno a z_v . Se m è molto grande e, per ogni diverso z ottenuto, indichiamo con $m(z) < m$ il numero di misurazioni che hanno condotto al risultato z , allora il rapporto $\frac{m(z)}{m}$ è funzione di z e indica la *probabilità* di trovare z , o un valore molto prossimo a z , quando si misura la grandezza.

Se le misurazioni successive non si influenzano a vicenda, e se i fattori che portano a risultati diversi dal valore vero sono casuali e non imputabili a difetti sistematici nel funzionamento (o nell'utilizzazione)

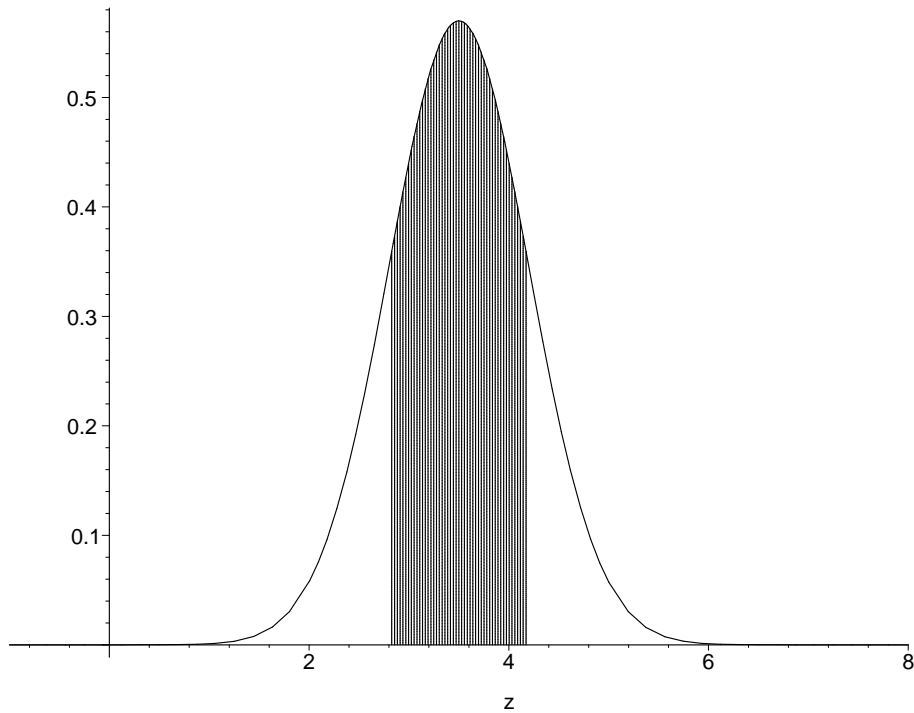


Figura 8: **Esempio di distribuzione normale di probabilità** . Il grafico riproduce la funzione $p_{z_v, \sigma_v}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(z-z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}$, nel caso sia: $z_v = 3,5$, $\sigma_v = 0,7$. La regione tratteggiata corrisponde a valori di z compresi fra $z_v - \sigma_v$ e $z_v + \sigma_v$. L'area compresa tra l'asse delle ascisse e la curva è uguale a 1, in quanto esprime la somma delle probabilità di ottenere, facendo una misura, qualunque valore tra $-\infty$ e $+\infty$.

dell'apparato di misura, allora la *densità di probabilità* di trovare un valore qualsiasi z è espressa da

$$p_{z_v, \sigma_v}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(z-z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}. \quad (5.5)$$

In Figura 8 appare il grafico di questa funzione, a forma di *campana*, corrispondente a determinati valori di z_v , σ_v . Dal momento che z può assumere qualunque valore, la somma delle probabilità di ottenere un qualsiasi z è uguale a 1, e infatti si dimostra che l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse vale 1.

Questa distribuzione statistica si incontra in una grande varietà di situazioni sperimentali, e viene detta *distribuzione normale* o *gaussiana*. Il parametro $\sigma_v > 0$, che la caratterizza, si chiama *deviazione standard*, ed esprime l'entità della dispersione dei risultati intorno al valore vero z_v : quanto più è piccolo σ_v , tanto più è precisa la misurazione effettuata con il nostro apparato sperimentale. La Figura 8 mostra che la probabilità è massima in corrispondenza a $z = z_v$, e che decresce quanto più z differisce

dal valore vero z_v . Inoltre l'area tratteggiata che si estende da $z_v - \sigma_v$ a $z_v + \sigma_v$, esprime la probabilità che il valore trovato facendo una misura si scosti dal valore vero z_v meno di σ_v . Tale area vale circa 0,68, e quindi, se le misurazioni si conformano a questa distribuzione di probabilità, abbiamo quasi il 70 % di probabilità di trovare, in ogni misurazione, un valore che differisce dal valore vero non più di σ .

5.3 Il principio di massima verosimiglianza

In pratica, volendo determinare il valore di una grandezza fisica, se ne eseguono m misurazioni diverse, e dai risultati ottenuti z_1, z_2, \dots, z_m , si vuole ricavare una stima per il valore della grandezza. Supponiamo che la misurazione della nostra grandezza dia luogo a valori che sono in accordo con una distribuzione *normale* del tipo indicato nella 5.5. Allora la probabilità di trovare il risultato z_k eseguendo una misurazione è:

$$p_{z_v, \sigma_v}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(z_k - z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}, \quad (5.6)$$

per ognuno dei risultati z_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Poichè il risultato ottenuto in una misura è indipendente dai risultati che si ottengono nelle altre, la probabilità $p_{z_v, \sigma_v}(z_1, z_2, \dots, z_m)$ di ottenere esattamente i valori z_1, z_2, \dots, z_m eseguendo m misurazioni successive è data dal prodotto di queste m probabilità :

$$\begin{aligned} p_{z_v, \sigma_v}(z_1, z_2, \dots, z_m) &= \frac{e^{-\frac{(z_1 - z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \cdot \frac{e^{-\frac{(z_2 - z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \cdots \frac{e^{-\frac{(z_m - z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m (\sigma_v)^m} e^{-\frac{\sum_{k=1}^m (z_k - z_v)^2}{2(\sigma_v)^2}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

che assume il valore massimo possibile qualora si avesse esattamente $z_1 = z_2 = \dots = z_m = z_v$:

$$p_{z_v, \sigma_v}(z_v, z_v, \dots, z_v) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m (\sigma_v)^m}. \quad (5.8)$$

Ma in generale noi ignoriamo il valore dei parametri z_v e σ_v , e vogliamo appunto utilizzare il risultato delle m misurazioni per determinare valori z_0, σ_0 che si approssimino, quanto più è possibile, ai valori veri z_v, σ_v . z_0 rappresenterà il valore della grandezza fisica da noi misurato, e σ_0 darà una indicazione complessiva sulla bontà del metodo sperimentale utilizzato, ovvero sull'incertezza relativa al valore z_0 trovato per la grandezza considerata.

Il *principio di massima verosimiglianza* consente di rispondere a questa esigenza. Ricordando la 5.7, definiamo la *funzione di verosimiglianza relativa ai dati sperimentali* z_1, z_2, \dots, z_m :

$$v(z, \sigma; z_1, z_2, \dots, z_m) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m (\sigma)^m} e^{-\frac{\sum_{k=1}^m (z_k - z)^2}{2\sigma^2}}; \quad (5.9)$$

essa dipende dalle variabili z , σ , ed è diversa a seconda della m -upla z_1, z_2, \dots, z_m dei dati sperimentali disponibili. Al variare di z e di $\sigma > 0$, la funzione di verosimiglianza varia e, in generale, raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza a valori definiti $z = z_0, \sigma = \sigma_0$; il principio di massima verosimiglianza asserisce che questi sono proprio i valori di z e di σ che caratterizzano la distribuzione di probabilità normale maggiormente in accordo con i dati sperimentali z_1, z_2, \dots, z_m . In altre parole, confrontando la 5.7 con la 5.9, vediamo che z_0 e σ_0 sono quei valori che rendono massima la probabilità di trovare gli m risultati sperimentali che abbiamo effettivamente ricavato dalle misurazioni.

5.4 Valore medio e deviazione standard

Per illustrare il principio di massima verosimiglianza, applichiamo a un campione di m misure sperimentali z_1, z_2, \dots, z_m . Vogliamo verificare che, se m è molto grande, il principio di massima verosimiglianza porta a identificare i valori:

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_m}{m} \equiv \bar{z}, \quad \sigma'_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z})^2}; \quad (5.10)$$

vediamo così confermata la regola che identifica la miglior stima della grandezza misurata con il *valore medio* dei risultati trovati.

Infatti, notiamo che l'argomento della funzione esponenziale nella 5.9 è negativo, e quindi dovremo cercare i valori $z = z_0, \sigma = \sigma'_0$ che rendono *minimo*:

$$\frac{\sum_{k=1}^m (z_k - z)^2}{2\sigma^2}.$$

Dal momento che questa grandezza dipende da σ solo per il fattore $\frac{1}{\sigma^2}$, il valore cercato z_0 sarà quello che rende minima la somma dei quadrati $\sum_{k=1}^m (z_k - z)^2$. Riscriviamo questa somma, dividendola per m , e facendo intervenire il valore medio \bar{z} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z_k - z)^2 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [(z - \bar{z}) - (z_k - \bar{z})]^2 \\ &= (z - \bar{z})^2 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z})^2 - \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m (z - \bar{z})(z_k - \bar{z}). \end{aligned}$$

Ma quest'ultimo contributo è nullo; infatti, $z - \bar{z}$ è fattore comune a tutti i termini della somma, e quindi:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z - \bar{z})(z_k - \bar{z}) = (z - \bar{z}) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z}) = (z - \bar{z}) \left[\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m z_k - \bar{z} \right] = 0.$$

Dunque otteniamo:

$$\frac{\sum_{k=1}^m (z_k - z)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 \right];$$

questa espressione mostra che, qualunque sia il valore di σ , essa diventa minima in corrispondenza al valore $z = \bar{z}$, e quindi abbiamo verificato che $z_0 = \bar{z}$.

Sostituendo $z = z_0$ nella 5.9, la funzione di verosimiglianza dipende solo più da σ , e assume la forma:

$$\begin{aligned} v(z_0, \sigma; z_1, z_2, \dots, z_m) &\equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^m} e^{-\frac{\sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{m(\sigma'_0)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma'_0)^{\frac{m}{2}}} \left[\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma} \right)^2 e^{-\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma} \right)^2} \right]^{\frac{m}{2}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

ottenuta sostituendo la grandezza σ'_0 definita nella 5.10, e usando la proprietà della funzione esponenziale: $e^{rs} = (e^r)^s$, valida qualunque siano i numeri r, s .

Notiamo che la potenza $\frac{m}{2}$ è positiva, e quindi il valore di $\sigma > 0$ che rende massima $v(z_0, \sigma; z_1, z_2, \dots, z_m)$ è lo stesso che rende massima la funzione

$$\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma} \right)^2 e^{-\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma} \right)^2}.$$

Se poniamo $\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma} \right)^2 \equiv x$, dobbiamo trovare il valore di $x > 0$ che rende massima la funzione $f(x) \equiv x e^{-x}$, già incontrata nel paragrafo 3.4; il suo grafico compare nella Figura 5 e mostra che tale funzione assume il valore massimo per $x = 1$. Quindi, con questa osservazione, abbiamo completato la verifica del fatto che la funzione di verosimiglianza $v(z, \sigma; z_1, z_2, \dots, z_m)$ raggiunge il valore massimo se $z = \bar{z}$, $\sigma = \sigma'_0$.

Se il numero m di misurazioni non è abbastanza grande, bisogna introdurre un fattore correttivo per la valutazione della deviazione standard ottenuta. Infatti, nel caso limite in cui fosse stata eseguita una sola misura con risultato z_1 , dovrebbe risultare indefinita la deviazione standard, in quanto un solo risultato non può dare luogo a dispersione tra i risultati. Ponendo $m = 1$, dovremmo identificare $\bar{z} \equiv z_1$ e la valutazione ottenuta per la deviazione standard, riportata nella 5.10, fornirebbe il valore ben definito $\sigma'_0 = 0$. La valutazione più corretta della deviazione standard sarebbe invece:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (z_k - \bar{z})^2} \quad (5.12)$$

che, nel caso fosse $m = 1$, diventerebbe indefinita: $\sqrt{\frac{1}{0}} 0$. E' chiaro che le 5.10, 5.12 conducono a risultati indistinguibili quando m è grande.

5.5 L'incertezza nelle misure fatte

Applichiamo i concetti di teoria degli errori, che abbiamo richiamato negli ultimi paragrafi, alle nostre misurazioni effettuate per determinare la vita media del muone, basandoci su un campione di n misurazioni indipendenti, ad esempio quello costituito dai dati riportati in Tabella 2, da $k_i = 38$, a $k_f = 148$, e quindi con $n = 111$.

Usando le stesse notazioni della 4.1, possiamo riassumere la sessione di misure, dicendo che essa ha consentito di effettuare una misura per ciascuna delle n diverse grandezze fisiche: $Y(x_k) \equiv a_v x_k + b_v$, $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$, trovando, ordinatamente per ciascuna di esse, il risultato empirico Y_k , $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$. Da questi n risultati sperimentali è possibile ottenere una valutazione dei parametri incogniti a_v, b_v , e anche delle incertezze relative.

Le caratteristiche dell'apparato sperimentale utilizzato consentono di ritenere che gli errori compiuti siano casuali, e che le misure effettuate per valori diversi di x non influiscano le une sulle altre. Inoltre, la dispersione dei valori che si trovano misurando successivamente la stessa grandezza $a_v x + b_v$, per un dato x , rimane sempre la stessa anche quando si considerano valori diversi di x . In base a ciò, qualora si ripettesse più volte la misurazione della stessa grandezza $a_v x + b_v$, per un dato x , è ragionevole ammettere che i risultati sarebbero in accordo con una distribuzione di probabilità *normale*, analoga a quella considerata nella 5.5.

Pertanto, la probabilità di trovare il valore Y_k misurando la grandezza $Y(x_k) = a_v x_k + b_v$, è espressa da

$$p_{a_v, b_v, \sigma_v}(Y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{[Y_k - (a_v x_k + b_v)]^2}{2\sigma_v^2}}, \quad (5.13)$$

dove la deviazione standard σ_v quantifica la dispersione intorno al valore vero $a_v x_k + b_v$, sconosciuto, dei risultati che si troverebbero nelle misure successive. Come appena osservato, questa deviazione standard può essere considerata sempre la stessa in tutte le n misure, ed è anch'essa sconosciuta.

Indichiamo con $p_{a_v, b_v, \sigma_v}(Y_{k_i}, Y_{k_i+1}, \dots, Y_{k_f})$, la probabilità di ottenere proprio tutti i valori Y_k , $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$, facendo la misura rispettivamente di $a_v x_k + b_v$, $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$; dal momento che le misure sono indipendenti tra loro, questa probabilità complessiva si ottiene eseguendo il prodotto delle probabilità corrispondenti a ciascun risultato, e cioè :

$$p_{a_v, b_v, \sigma_v}(Y_{k_i}, Y_{k_i+1}, \dots, Y_{k_f}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_v^n} e^{-\frac{\sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - (a_v x_k + b_v)]^2}{2\sigma_v^2}}. \quad (5.14)$$

Le considerazioni svolte nel paragrafo 5.3 suggeriscono di definire la *funzione di verosimiglianza* relativa agli n risultati

$$(x_k, Y_k), \quad k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f,$$

dipendente dalle tre variabili a, b, σ :

$$v(a, b, \sigma) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{\sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - (ax_k + b)]^2}{2\sigma^2}}; \quad (5.15)$$

per non appesantire le notazioni, in questa espressione si è tralasciato di indicare esplicitamente che essa si riferisce agli n dati sperimentali

$$(x_{k_i}, y_{k_i}), (x_{k_i+1}, y_{k_i+1}), \dots, (x_{k_f}, y_{k_f}).$$

In base al principio di massima verosimiglianza esposto nei paragrafi precedenti, i valori a_0, b_0, σ_y che rendono massima questa funzione di verosimiglianza, forniscono la valutazione più prossima possibile ai valori incogniti a_v, b_v, σ_v , compatibilmente con i risultati ottenuti nelle n misure.

Ricordando la definizione dello *scarto quadratico medio* $E(a, b)$ data nella 4.3, vediamo che la 5.15 assume la forma:

$$v(a, b, \sigma) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{n E(a, b)}{2\sigma^2}}, \quad (5.16)$$

dove l'argomento della funzione esponenziale è una quantità negativa. Quindi i valori di a, b, σ che rendono massima la funzione di verosimiglianza devono rendere minima la grandezza $\frac{E(a, b)}{\sigma}$. Ma nel paragrafo 4.2 abbiamo già verificato che i valori $a = a_0, b = b_0$, dati nella 4.9:

$$a_0 \equiv \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2}, \quad b_0 \equiv \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x}\overline{xy}}{x^2 - (\bar{x})^2},$$

rendono minimo $E(a, b)$; cioè $E(a_0, b_0)$, che abbiamo calcolato in modo esplicito nella 5.3:

$$E(a_0, b_0) = \frac{(\overline{y^2} - (\bar{y})^2)(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) - (\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{x^2 - (\bar{x})^2},$$

è il valore più piccolo tra quelli assunti da $E(a, b)$, al variare di a e di b . Quindi anche $\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma}$, qualunque sia il valore di σ , è il valore minimo assunto da $\frac{E(a, b)}{\sigma}$, al variare di a e di b .

Dunque, per rendere massima la funzione di verosimiglianza, occorre fissare in essa le variabili a, b sui valori $a = a_0, b = b_0$, e determinare il valore di σ che rende massima

$$\begin{aligned} v(a_0, b_0, \sigma) &\equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{n E(a_0, b_0)}{2\sigma^2}} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma^2}} \right]^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi E(a_0, b_0)} \right)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma^2} e^{-\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma^2}} \right]^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

Considerazioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo 5.4, portano a concludere che il valore di σ deve essere fatto coincidere con $\sqrt{E(a_0, b_0)}$. Infatti abbiamo già notato che la funzione $x e^{-x}$ è massima quando $x = 1$, ovvero

$$\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma^2} e^{-\frac{E(a_0, b_0)}{\sigma^2}}$$

è massimo quando $\sigma^2 = E(a_0, b_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} [Y_k - (a_0 x_k + b_0)]^2$.

Qualora il numero n dei risultati sperimentali disponibili non sia molto grande, occorre introdurre un fattore correttivo. Ciò appare evidente se si esamina il caso limite di due sole misurazioni, cioè $n = 2$. Indichiamo con x_1, Y_1 , e x_2, Y_2 i due risultati sperimentali; è immediato calcolare $E(a_0, b_0)$. Infatti si ottiene:

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4};$$

e, similmente:

$$\overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{(Y_1 - Y_2)^2}{4}, \quad \overline{xy} - \overline{x} \overline{y} = \frac{(x_1 - x_2)(Y_1 - Y_2)}{4};$$

sostituendo queste espressioni nella 5.3 e semplificando, si trova identicamente $E(a_0, b_0) = 0$, e quindi la deviazione standard risulterebbe uguale a zero. Questo risultato è assurdo, nel senso che due misure sono sufficienti a determinare la retta in modo univoco, ma non sono in grado di dare alcuna informazione aggiuntiva sulle incertezze; in conseguenza di ciò l'espressione della deviazione standard dovrebbe assumere, nel caso $n = 2$, valore *indeterminato*, e quindi non può essere identificata con $\sqrt{E(a_0, b_0)}$.

L'espressione della deviazione standard, valutata in base a n misure indipendenti, che risolve questa difficoltà, risulta essere:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{n}{n-2} E(a_0, b_0)} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \left[(\overline{y^2} - (\overline{y})^2) - \frac{(\overline{xy} - \overline{x} \overline{y})^2}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \right]}, \quad (5.17)$$

che, nel caso $n = 2$, assume la forma indeterminata $\sigma_y = \sqrt{2 \frac{0}{0}}$, mentre viene a coincidere praticamente con $\sqrt{E(a_0, b_0)}$ se n è molto grande rispetto a 2.

Sostituendo il valore numerico delle diverse grandezze calcolate con il nostro campione di 111 misurazioni riportato nella 4.13, si ricava

$$\sigma_y = 0,3270. \quad (5.18)$$

Tale è l'incertezza nelle nostre misure del numero di muoni decaduti con un dato tempo di decadimento, e può essere considerata costante per tutti i tempi di decadimento registrati. Essa è stata indicata nella Figura 7 per un solo punto sperimentale.

5.6 L'incertezza nella vita media del muone

Occorre valutare l'errore di cui può essere affetto il valore da noi misurato della vita media del muone: $\tau_\mu = 2,1995 \mu s$, cioè di quanto esso possa al più differire dal valore vero, sconosciuto. Abbiamo ricavato tale valore dalla misurazione del coefficiente angolare

$$a_0 \equiv \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2},$$

della retta $Y(x) = a_0 x + b_0$ che meglio interpola i dati sperimentali ottenuti. Dobbiamo quindi valutare l'incertezza nel risultato trovato per a_0 , e da questa dedurre l'incertezza in τ_μ .

Gli errori nelle misure derivano sia dalla determinazione dei tempi di decadimento, sia dal conteggio del numero di muoni che hanno fatto registrare determinati tempi di decadimento. L'incertezza nei tempi di decadimento può essere identificata con l'ampiezza dei *canali di tempo* dell'apparato sperimentale, cioè con $0,05 \mu s$, costante per tutti i tempi di decadimento; la corrispondente incertezza nella variabile adimensionata x è quindi pari a 1, e ciò si applica a tutti i valori x_k , $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$ che compaiono nel campione di dati da noi utilizzato.

Quanto all'incertezza nei valori Y_k , $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$, abbiamo visto che essa può essere identificata con σ_y , definito in generale nella 5.17, valido per tutti i diversi Y_k ; sulla base del campione di misure selezionate, abbiamo trovato: $\sigma_y = 0,3270$.

Si tratta di valutare come si propaga al coefficiente a_0 l'incertezza che grava sui valori trovati per le $2n$ grandezze x_k, Y_k , $k = k_i, k_i + 1, \dots, k_f$, che intervengono a formare a_0 . Il calcolo risulta semplificato in quanto le incertezze relative a tutte le x_k sono uguali tra loro, e parimenti uguali a σ_y le incertezze su tutte le Y_k . Notiamo che, nell'espressione di a_0 , le Y_k compaiono solo a numeratore:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} (x_k Y_k - \bar{x} Y_k)}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} (x_k - \bar{x}) Y_k}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} \left[\frac{x_k - \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \right] Y_k. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Indichiamo con δa_0 l'incertezza, o errore, nel valore del coefficiente a_0 ; indichiamo invece con $\delta a_0|_y$ il contributo a tale errore dovuto unicamente all'incertezza nei valori Y_k , ottenuto trascurando momentaneamente l'incertezza nelle x_k . Dal momento che a_0 è somma delle diverse grandezze

$$\frac{1}{n} \left[\frac{x_k - \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \right] Y_k,$$

che soddisfano ad una distribuzione di probabilità normale, sappiamo dalla teoria degli errori (si veda il manuale [4]) che il quadrato dell'errore $\delta a_0|_y$ derivante da esse è dato dalla somma dei quadrati degli errori

delle diverse grandezze. Essendo l'incertezza in tutte le Y_k uguale a σ_y , otteniamo:

$$\begin{aligned} (\delta a_0|_y)^2 &= \sum_{k=k_i}^{k_f} \frac{1}{n^2} \left[\frac{x_k - \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \right]^2 (\sigma_y)^2 = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=k_i}^{k_f} (x_k - \bar{x})^2}{[\overline{x^2} - (\bar{x})^2]^2} (\sigma_y)^2 \\ &= \frac{(\sigma_y)^2}{n[\overline{x^2} - (\bar{x})^2]}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

avendo ricordato la 4.7. Sostituendo i valori numerici ottenuti con il nostro insieme di dati sperimentali: $\sigma_y = 0,3270$, $n = 111$, $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 1027$, ricaviamo:

$$\delta a_0|_y = 0,0009685 \cong 0,00097. \quad (5.21)$$

Il calcolo completo dell'errore δa_0 , che tenga conto anche dell'incertezza ± 1 nelle x_k , può essere svolto ricorrendo al metodo generale di propagazione degli errori basato sull'analisi matematica (si veda ad esempio il testo [4]), e, per questa ragione, riportiamo il risultato senza tentarne una giustificazione. Si trova:

$$\delta a_0 = \delta a_0|_y \sqrt{1 + \frac{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \frac{1}{(\sigma_y)^2}}. \quad (5.22)$$

Dal momento che i nostri dati sperimentali forniscono anche $\overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 0,6355$, vediamo che

$$\frac{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \frac{1}{(\sigma_y)^2} = 0,005787$$

è quasi trascurabile rispetto a 1; dunque il contributo dell'incertezza nelle x_k è quasi trascurabile rispetto a quello dovuto all'incertezza nelle Y_k . Infatti troviamo

$$\delta a_0 = 0,0009712 \cong 0,00097,$$

coincidente con $\delta a_0|_y$, se ci si limita alle prime due cifre significative.

Pertanto il campione di dati sperimentali da noi scelto conduce al risultato

$$a_0 = -0,02273 \pm 0,00097, \quad (5.23)$$

che abbiamo scritto in modo da tenere conto delle prime due cifre significative dell'errore; quindi le misure effettuate portano ad attribuire il valore $a_0 = -0,02273$ alla grandezza incognita a_v , con un margine di incertezza dato da $\pm 0,00097$. Notiamo che l'errore relativo in a_0 risulta essere pari a circa 4%; precisamente:

$$\frac{\delta a_0}{|a_0|} = 0,043 \ll 1.$$

Ricordando la 4.12, la vita media del muone è data da:

$$\tau_\mu = \frac{0,05 \mu s}{|a_0|} = 2,200 \mu s,$$

con un errore, o incertezza, $\delta\tau$ che siamo in grado, adesso, di ricavare dall'incertezza su a_0 . A tale scopo serve ricordare che, in base alla teoria degli errori (si veda il manuale [4]), le grandezze τ_μ e a_0 , essendo inversamente proporzionali, hanno lo stesso *errore relativo*:

$$\frac{\delta a_0}{|a_0|} = \frac{\delta\tau}{\tau_\mu}, \quad (5.24)$$

come verificheremo subito. Da tale relazione ricaviamo l'errore nella vita media misurata:

$$\delta\tau \cong \tau_\mu \frac{\delta a_0}{|a_0|} = 0,094 \mu s,$$

dove è significativa solo la prima cifra. Ne segue che il campione di dati sperimentali da noi impiegato conduce, per la vita media del muone, alla valutazione:

$$\tau_\mu = (2,20 \pm 0,09) \mu s. \quad (5.25)$$

Quanto alla 5.24, consideriamo, ad esempio, il valore *minimo* di τ_μ , compatibile con i nostri risultati sperimentali, cioè: $\tau_\mu - \delta\tau$; esso si identifica con $\frac{0,05 \mu s}{|a_0| + \delta a_0}$, in quanto $|a_0| + \delta a_0$ è il massimo valore che possiamo attribuire alla grandezza incognita $|a_v|$, che sia compatibile con i risultati delle nostre misure. Dunque ricaviamo:

$$\begin{aligned} \tau_\mu - \delta\tau &= \frac{0,05 \mu s}{|a_0| + \delta a_0} = 0,05 \frac{|a_0| - \delta a_0}{|a_0|^2 - (\delta a_0)^2} \mu s = \frac{0,05 \mu s}{|a_0|} \frac{1 - \frac{\delta a_0}{|a_0|}}{1 - \left(\frac{\delta a_0}{|a_0|}\right)^2} \\ &\cong \frac{0,05 \mu s}{|a_0|} \left(1 - \frac{\delta a_0}{|a_0|}\right) = \tau_\mu - \tau_\mu \frac{\delta a_0}{|a_0|}, \end{aligned}$$

avendo trascurato a denominatore: $\left(\frac{\delta a_0}{|a_0|}\right)^2 = 0,0018$ rispetto a 1. Entro tale approssimazione abbiamo così verificato la 5.24.

6 Conclusioni

Riferimenti bibliografici

[1] Riportiamo le indicazioni bibliografiche sulle misurazioni più recenti della vita media del muone; la media dei valori ottenuti in esse costituisce il risultato riportato nella 1.1:

- J. Duclos, A. Magnon e J. Picard. *A new measurement of the muon lifetime*, Physics Letters, dicembre 1973.

- M. P. Balandin, V. M. Grebenyuk, V. G. Zinov, A. D. Konin, A. N. Panomarev. *Measurement of the lifetime of the positive muon*, English translation of Soviet Physics ZETF, novembre 1974.
- K. L. Giovanetti, W. Dey, M. Eckhause, R. D. Hart, R. Hartmann, D. W. Hertzog, J. R. Kane, W. A. Orance, W. C. Phillips, R. T. Siegel, W. F. Vulcan, R. E. Welsh, R. G. Winter. *Mean life of positive muon*, Physical Review D, febbraio 1984.
- G. Bardin, J. Duclos, A. Magnon, J. Martino. *A new measurement of the positive muon lifetime*, Physics Letters, marzo 1984.

- [2] La massa del neutrino sembra non superare 1 eV , secondo quanto emerso ad una recente conferenza; si può consultare l'articolo di rassegna di Francis Halzen: *Uppsala 2005: leptons, photons and a lot more*, in CERN COURIER, Vol. 45, N. 9, 2006.

L'*elettronvolt* è l'energia pari all'energia cinetica acquistata da una particella, avente carica elettrica uguale all'elettrone, inizialmente ferma e soggetta alla forza dovuta alla differenza di potenziale di un *volt*; quindi, in *joule*: $1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ J}$, dal momento che la carica dell'elettrone vale $1,602 \cdot 10^{-19}\text{ coulomb}$. L'equivalenza tra massa ed energia è espressa dalla formula di Einstein: $E = mc^2$, dove c denota la velocità della luce nello spazio vuoto: $c \cong 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; dunque, 1 eV equivale ad una massa di circa $1,8 \cdot 10^{-36}\text{ kg}$.

- [3] Davide Massone. *Progetto e realizzazione di un apparato sperimentale per la misura della vita media di muoni da raggi cosmici*. Tesi di laurea in Fisica, Università del Piemonte Orientale Amedeo Avogadro, Relatore Prof. Giuseppe Dellacasa, Alessandria 2006.
- [4] John R. Taylor. *Introduzione all'analisi degli errori. Lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*, Seconda edizione, Zanichelli, Bologna 1999.
- [5] Come introduzione alla fisica delle particelle, si suggerisce il testo di scuola secondaria: Ugo Amaldi. *Le idee della fisica*, Vol. 3, Zanichelli, Bologna 2001. In particolare, è utile la lettura dei paragrafi: §4.4 Radioattività naturale. §5.5 Le tre famiglie di particelle-materia.
- [6] Per i concetti base della statistica e per il metodo dei minimi quadrati, si suggeriscono i testi per le scuole secondarie:
- W. Maraschini, M. Palma. *ForMat, SPE(triennio)*, Vol. 1, Paravia 2001. Unità 16 (Statistica).
 - G. Zwirner, L. Scaglianti. *Pensare la MATEMATICA*, Vol. 3, CEDAM 1993. Si veda il Cap. 16.

- [7] Per l'effetto di dilatazione del tempo nel caso specifico del muone, si veda ad esempio: N. Easwar and D. A. MacIntire, *Am. J. Phys.* 59, (1991), pag. 589.